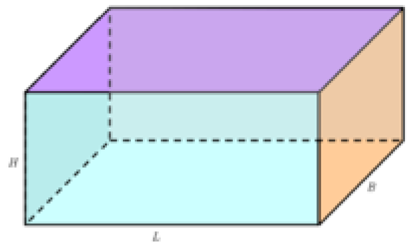
गणित

अध्याय-12: पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

घनाभ

घनाभ (क्यूब्वायड) या आयतफलकी वह समान्तरषटफलक है जिसका प्रत्येक फलक आयताकार हो। जब तीनों बीमा (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई) समान हों तो वह आकार घन (क्यूब) कहलाता है। ईंट, आयतफलकी का सबसे अच्छा उदाहरण है।



घनाभ के सूत्र

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$.

घनाभ का परिमाप = $2(l + b) \times h$.

घनाभ के समस्त पृष्ठों का क्षेत्रफल = 2(लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई)

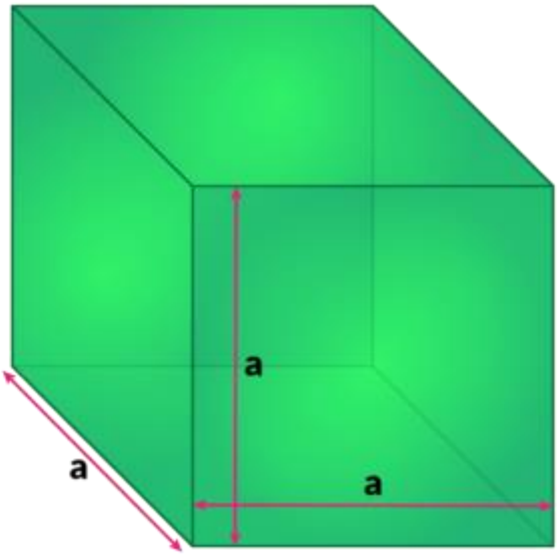
घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

घनाभ के विकर्ण = √(लम्बाई)^2 + (चौड़ाई)^2 + (ऊँचाई)^2

घन

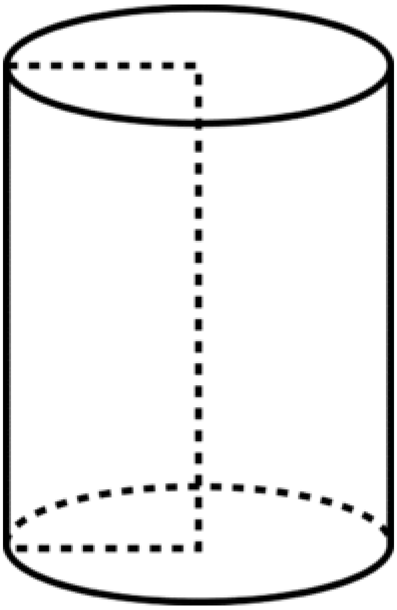
घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा = भुजा^{3} (भुजा पर घतांक 3) घन इकाई / घन यूनिट होता है । जो कि घनाभ के आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई घन इकाई /घन यूनिट का ही एक रूप होता है । घन एक ऐसी त्रिआयामी आकृति को कहा जाता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई सामान होती हैं।

घन का आयतन = भुजा × भुजा x भुजा या भुजा^{3}



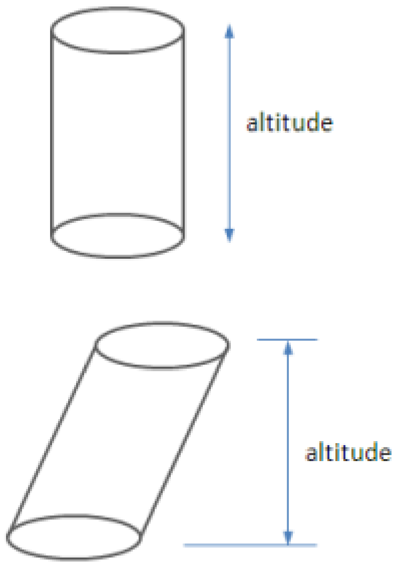
बेलन

बेलन एक ऐसी त्रिआयामी(3d) ठोस आकृति होती है जोकि दो वृत्त एवं एक वक्र आयत से मिलकर बना होता है। इसके दो सिरे सामान त्रिज्या वाले वृत्त होते हैं एवं पार्श्व प्रष्ठ वक्र(curved) होता है।



समकोणीय एवं परोक्ष बेलन

समकोणीय बेलन एक ऐसा बेलन होता है जिसका अक्ष आधार को समकोण पर काटता है। लेकिन अगर कोई अक्ष आधार को समकोण पर नहीं काट रहा है तो फिर वह बेलन एक परोक्ष बेलन होगा।



बेलन का आयतन एवं क्षेत्रफल

अगर हमें एक बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो हमें इसे सबसे पहले तीन टुकड़ों में बांटना पडेगा। ये तीन टुकड़े होंगे दो सर्वांग्सम एवं समान्तर वृत्त एवं वक्र पृष्ठ जो कि एक आयत है।

जैसा कि हम जानते हैं कि एक वृत्त का क्षेत्रफल πr2 होता है। अगर हमारे पास दो वृत्त हैं तो फिर इनका कुल क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2

अब हमें बचे हुए आयत का क्षेत्रफल निकालना है जोकि होता है लम्बाई * चौड़ाई । यहाँ हमारे पास आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई मानी जायेगी। अब जो आयत की चौड़ाई है वह वृत्त के परिमाप के सामान होगी जोकि 2πr होगा। अतः इस आयत का क्षेत्रफल होगा।

= 2πr × h

जब हम इन दोनों टुकड़ों को जोड़ देंगे तो इस बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2 + 2πr × h

अतः बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πr(r + h)

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

जैसा कि हम जानते हैं की बेलन का वक्र पृष्ठ सिर्फ एक आयत होता है अतः हमें सिर्फ उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। यही क्षेत्रफल इस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

जैसा की हम जानते हैं एक आयत का क्षेत्रफल होता है :

लम्बाई × चौड़ाई

यहाँ आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई हो जायेगी लेकिन आयत की चौड़ाई वृत्त का परिमाप होगा। अतः हमें वह ज्ञात करना होगा। जैसा कि हम जानते हैं की एक वृत्त का परिमाप होगा :

$= 2\pi r$

अब हम वृत्त के परिमाप को एवं बेलन की ऊँचाई को गुना कर देंगे जिससे हमारे पास बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल या आयत का क्षेत्रफल आया जाएगा।

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r \times h$

बेलन का आयतन

आयतन(volume) का मतलब होता है की कोई त्रिआयामी आकृति अपने अन्दर कितना द्रव्य रख सकती है। इसे हम अक्सर m^3 या cm^3 से व्यक्त करते हैं।

एक बेलन का आयतन (volume of cylinder) निकालना बहुत सरल होता है। इसके लिए हमें बस वृत्त के क्षेत्रफल को बेलन की ऊंचाई से गुना करना पड़ता है।

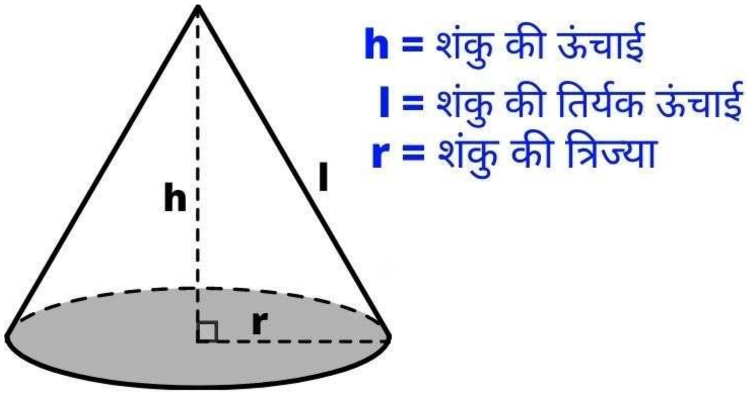
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

इसे ऊंचाई (h) से गुना करने पर :

बेलन का आयतन $= \pi r^{2h}$

शंकु

शंकु (Cone) एक ऐसी त्रिआयामी (3d) आकृति है जिसका जिसका आधार गोलाकार होता है तथा जिसका शीर्ष एक बिंदु होता है। यदि किसी Shanku का आधार एक वृत्त हो तो उसे हम लम्ब वृत्तीय शंकु कहते है। यह शंकु समान आधार और ऊंचाई वाले बेलन के $\frac{1}{3}$ भाग के बराबर होता है।



एक शंकु में केवल एक आधार होता है एवं गोलाकार होता है। यह Cone का नीचे का हिस्सा होता है। इसे शंकु का फलक भी कहा जाता है।

एक शंकु में एक शीर्ष होता है। शंकु का शीर्ष एक बिंदु होता है।

एक शंकु की चौड़ाई उसके गोलाकार फलक का व्यास होता है अर्थात शंकु के गोलाकार भाग का व्यास ही शंकु की चौड़ाई होती है।

शंकु का क्षेत्रफल

शंकु का क्षेत्रफल दो प्रकार का होता है एक पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा दूसरा वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल। आइये अब Shanku के क्षेत्रफल को निकालने के लिए महत्वपूर्ण सूत्रों को जाने।

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल –

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें शंकु की त्रिज्या तथा शंकु की तिर्यक (तिरछी) ऊंचाई का पता होना चाहिए। तभी हम शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकाल सकते हैं।

शंकु का वक्र पृष्ठिय क्षेत्रफल = πRL

अगर हमें शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा त्रिज्या दी गयी हो तो हम शंकु की तिर्यक ऊंचाई निकाल सकते हैं। इसके लिए हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को इसके सूत्र के बराबर लिख कर

और थोड़ी सी कैल्कुलेशन करके मान ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा ही हम अन्य सूत्रों के साथ भी कर सकते हैं।

शंकु के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने का मतलब होता है शंकु के चारों तरफ का क्षेत्रफल। इसमे शंकु के तल में मौजूद वृत का क्षेत्रफल भी शामिल होता है। शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हम सूत्र का उपयोग करते हैं। Cone के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में हम शंकु तथा वृत के क्षेत्रफल को जोड़ देते हैं। क्योंकि Shanku के तल में वृत भी होता है।

जब हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृत्त का क्षेत्रफल भी जोड़ देते हैं तो हमें शंकु का पूर्ण पृष्ठीय या सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्त का क्षेत्रफल = शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\pi rl + \pi rl = \pi r(l + r)$$

अन्तः शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r\ (\ l + r\ )$

यहाँ R या r का मतलब शंकु के आधार की त्रिज्या होता है तथा L या l का मतलब शंकु की तिर्यक अर्थात तिरछी ऊंचाई होता है। पाई का मान हम $\frac{22}{7}$

या 3.14 लेते हैं।

अगर किसी सवाल या प्रश्न में हमें शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा जाए तो हम शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालेंगे ना कि वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

शंकु का आयतन

शंकु की बनावट के आधार पर हम Shanku का आयतन शंकु के समान आधार वाले एक बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा मानते हैं। जितना समान आधार वाले बेलन का आयतन होगा उसका तीसरा हिस्सा उसी आधार वाले शंकु का आयतन होगा।

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ बेलन का आयतन

इस प्रकार से Shanku का आयतन बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा होगा। इसलिए हम बेलन के आयतन को 3 से भाग कर देते हैं और हमें शंकु के आयतन का सूत्र मिल जाएगा।

शंकु का आयतन $\frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

गोला

गोले के सभी सूत्रों को याद करने से पहले जरुरी है कि गोले से सम्बंधित सभी प्रकार के मूल बातों को जान ले. जैसे कि गोला किसे कहते हैं अथवा गोले की परिभाषा क्या है, गोले की त्रिज्या, गोले का व्यास तथा गोले कितने प्रकार के होते हैं।

गोले का केंद्र व त्रिज्या

केंद्र (Center):- जिस निश्चित बिंदु या नियत बिंदु से एक त्रि-आयामी गोले का निर्माण होता है, वह नियत बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। जैसा की ऊपर दिए गए चित्र नियत बिंदु O गोले का केंद्र (Center) है।

त्रिज्या की माप :- किसी भी गोले की केंद्र से उसकी सतह के बीच के रेखाखंड की लम्बाई को गोले की त्रिज्या कहते हैं। जैसा की ऊपर दिए गए गोले की चित्र से स्पष्ट हो रहा है केंद्र बिंदु (O) तथा सतह बिंदु (A) के बीच की रेखाखंड की लम्बाई ही गोले की त्रिज्या की माप है। गोले के त्रिज्या की माप से गोले का आयतन तथा सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल (Gole ka Formula) आसानी से निकाल सकते हैं।

गोले का आयतन तथा क्षेत्रफल

गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास

(Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास (Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

एक गोले के बाहरी सतह द्वारा घिरा हुआ भाग, गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल होता है. चूँकि एक गोले में में कोई किनारा या कोना नहीं होता है, इसीलिए एक गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल ही गोले के सम्पूर्ण क्षेत्रफल होता है. अतः निम्नलिखित संबंधो द्वारा एक गोले का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल का फार्मूला या सूत्र को परिभाषित करते हैं।

माना कि एक गोला है जिसका केंद्र बिंदु O है, त्रिज्या R है तथा व्यास की लम्बाई D है, अतः

गोले का सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = 4 πR2

जहाँ π = 3.14

किसी भी गोले (Sphere) का क्षेत्रफल का फार्मूला (Formula) जब गोले का व्यास (Diameter) दिया हुआ हो.

Sphere ka Kshetrafal Formula = π D2

गोला का आयतन का सूत्र

किसी भी एक गोले के आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है. चूँकि गोला दो प्रकार का होता है, ठोस गोला तथा खोखला गोला. अतः दोनों ही गोले का आयतन का फार्मूला निकालने के लिए गोले के त्रिज्या (खोखले गोले के लिए बाह्य तथा अन्तः त्रिज्या) का माप तथा व्यास की लम्बाई पता होना चाहिए.

ठोस गोला वह गोला होता है जो कि अंदर से भरा हुआ होता है, अर्थात गोले के आंतरिक भाग खोखला नहीं होता है। गोले का उदाहरण – पृथ्वी, उपग्रह, बॉल बेअरिंग.

माना कि ठोस गोले का त्रिज्या R तथा व्यास D है, तब

गोले का आयतन का फार्मूला $= \frac{4}{3}\ \pi R^3$

यदि गोले का व्यास का माप दिया हो उस स्थिति में गोले का आयतन का सूत्र

गोले का आयतन का सूत्र $= \left(\frac{1}{6}\right)\ \pi D^3$

.खोखले गोला का आयतन का सूत्र

ऐसा गोला जो की अंदर से खाली या खोखला होता है वह खोखला गोला या गोलीय कोश कहलाता है. गोलीय कोश का उदाहरण- बॉल, बलून आदि.

किसी भी खोखले गोला या गोलीय कोश के आयतन का सूत्र (Formula) निकालने के लिए गोले का आतंरिक त्रिज्या तथा बाह्य त्रिज्या का माप पता होना चाहिए.

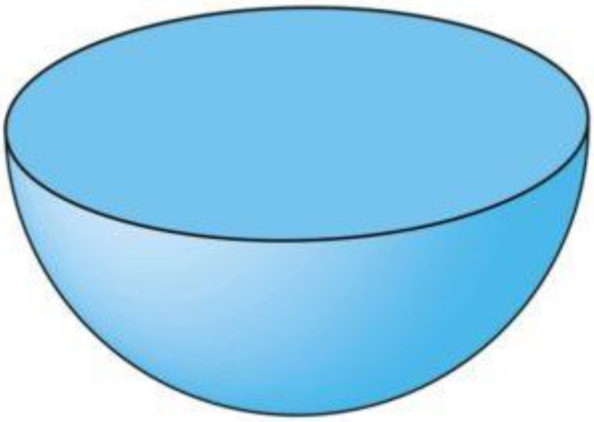
माना कि खोखले गोले का आंतरिक त्रिज्या (r) तथा बाह्य त्रिज्या R है, तब

खोखले गोले का आयतन का सूत्र $= \frac{4}{3}\ \pi(R^3 - R^3)$

यदि खोखले गोले का आतंरिक तथा बाह्य व्यास का माप क्रमशः d तथा D है तब,

खोखले गोले का आयतन का सूत्र $= \left(\frac{1}{6}\right) \pi(D^3 - d^3)$

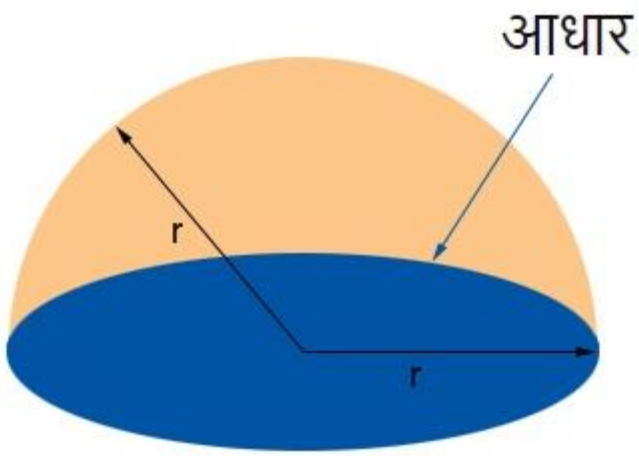
अर्द्ध गोला (Hemisphere)



जैसा की इसके नाम से ही प्रतीत हो रहा है, एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है। जब एक गोले को दो भागों में बांटा जाता है उससे हमें जो आकृति मिलती है वह अर्धगोला कहलाती है। इसकी एक सतह चपटी(flat) होती है एवं दूसरी सतह वक्र(curved) होती है।

ऊपर दी गयी आकृति में जैसा कि आप देख सकते हैं यहाँ इस त्रिआयामी आकृति की ऊपर वाली सतह चपटी(flat) है एवं जो दूसरी सतह है वह वक्र(curved) है। अतः यह एक अर्धगोला कहलायेगा।

अर्ध गोले की दो ही सतह होती हैं। पहली सतह चपटी होती है एवं दूसरी सतह वक्र अर्थात curved होती है। चपटी सतह उस अर्ध गोले का आधार कहलाती है।



एक अर्धगोले की जो वृत्त के आकार सतह होती है उसके हर बिंदु की केंद्र से दूरी समान होती है।

अर्ध गोला एक पूरे गोले को दो भागों में विभाजित किये जाने से बना होता है।

एक पूरे गोले को जब हम दो भागों में विभाजित करते हैं तो हमारे पास दो अर्धगोले हो जाते हैं।

अर्धगोले का आयतन

जैसा कि हम जानते हैं एवं पहले भी देख चुके हैं एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है अतः इसका आयतन भी पूरे गोले का आयतन का आधा होगा।

अतः

अर्ध गोले का आयतन = $\frac{1}{2}$ × गोले का आयतन

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\ \pi r^3$$

अतः अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^2$

अर्धगोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एक पूर्ण गोले के क्षेत्रफल को आधा करने पर निकल गया। अब हमें इसका पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो बस इसके आधार का क्षेत्रफल जोड़ना होगा।

अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

अतः अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$ वर्ग unit

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी 3D आकृति पर मौजूद सभी फलकों (या सतहों) के क्षेत्रफल का योग होता है। कुछ ठोस एक से अधिक आकृतियों के संयोजन से बनी होती हैं। इस प्रकार की आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सभी संयोजित आकृतियों का क्षेत्रफल अलग-अलग ज्ञात करके सभी क्षेत्रफल का योग करें।

उदाहरण के लिए पानी या केरोसिन के टैंकर को लेते हैं जो बीच में बेलनाकार तथा दोनों तरफ अर्द्धगोलाकार होता है। इसलिए इस ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। इससे हमें प्राप्त होता है:

ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

उदाहरण

रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्टू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मोमिया रंगों से रंग करना चाहता है। यह लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर

एक अर्धगोला अध्यारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ लीजिए।

हल:

यह लट्टू दो आकृतियों के संयोजन से बना है। एक अर्द्धगोला तथा उसके ऊपर शंकु है। अतः, हम वहाँ पर प्राप्त परिणाम को सुविधाजनक रूप से यहाँ प्रयोग कर सकते हैं। अर्थात्

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}(4\pi r^2)=2\pi r^2$$

$$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\,cm^2$$

साथ ही, शंकु की ऊँचाई = लट्टू की ऊँचाई – अर्धगोलीय भाग की ऊँचाई (त्रिज्या)

$$=\left(5-\frac{3.5}{2}\right)cm$$

अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l)= $\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2+(3.25)^2}=3.7$ cm

इसलिए शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi r l=\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\ cm^2$

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × 22/7 × 3.5/2 × 3.5/2 cm^2 + 22/7 × 3.5/2 × 3.7 cm^2

= 39.6 cm^2

उदाहरण

एक आकृति सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक का आधार 5 cm कोर या किनारे वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए।)

हलः

घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (कोर)^2 = 6 × 5 × 5 cm^2 = 150 cm^2

अब, घन का वह भाग जिस पर अर्धगोला लगा हुआ है पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

अतः ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल – अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2)$ cm^2

$= 150$ cm^2 $+ 22/7 \times 4.2 \times 4.2$ cm^2

$= 150$ cm^2 $+ 13.86$ cm^2 $= 163.86$ cm^2

ठोसों के संयोजन का आयतन

इस अनुच्छेद में यह ज्ञात करने की कोशिश करेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के आयतन किस प्रकार परिकलित किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करने में हमने दोनों घटकों (ठोसों) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं था क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो गया था। परंतु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होगा। दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन वास्तव में दोनों घटकों के आयतनों के योग के बराबर होता है, जैसाकि हम नीचे दिए उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण

शांता किसी शेड में एक उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है। यदि इस शेड के आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है तो शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। पुनः यदि यह मान लें कि शेड में रखी मशीनरी 300 m^3 स्थान घेरती है तथा शेड के अंदर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08 m^3 के औसत से स्थान घेरता है तब शेड में कितनी हवा होगी? (π = 22/7 लीजिए।)

हल

शेड के अंदर हवा का आयतन (जब इसमें कोई व्यक्ति या मशीनरी नहीं है) घनाभ के अंदर की हवा और अर्धबेलन के अंदर की हवा के आयतनों को मिला कर प्राप्त होगा। अब, घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 m, 7 m और 8 m हैं। साथ ही, अर्धबेलन का व्यास 7 m और ऊँचाई 15 m है।

इसलिए वांछित आयतन = घनाभ का आयतन + ½ बेलन का आयतन

आगे, मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान = 300 m^3

तथा 20 श्रमिकों द्वारा घेरा गया स्थान = 20 × 0.08 m^3 = 1.6 m^3

अतः, शेड में उस समय हवा का आयतन, जब उसमें मशीनरी और श्रमिक हैं

= 1128.75 – (300.00 + 1.60) = 827.15 m^3

उदाहरण

एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को जिन गिलासों से जूस देता था। उस बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास की आभासी धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

चूँकि गिलास का आंतरिक व्यास = 5 cm है और ऊँचाई = 10 cm है, इसलिए गिलास की आभासी धारिता = $\pi r^2 h$

= 3.14 × 2.5 × 2.5 × 10 cm^3 = 196.25 cm^3

परंतु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

अर्थात् कमी बराबर है $2/3\ \pi r^3$ = 2/3 × 3.14 × 2.5 × 2.5 × 2.5 cm^3

= 32.71 cm^3

अतः गिलास की वास्तविक धारिता = आभासी धारिता – अर्धगोले का आयतन

$= 196.25\ cm^3 - 32.71\ cm^3$

$= 163.54\ cm^3$

उदाहरण

एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

मान लीजिए BPC अर्धगोला है तथा ABC अर्धगोले के आधार पर खड़ा एक शंकु है। अर्धगोले (और शंकु की भी) की त्रिज्या = ½ × 4 cm = 2 cm इसलिए खिलौने का आयतन $= 2/3\ \pi r^3 + 1/3\ \pi r^2 h$

$= [2/3 \times 3.14 \times (2)^3 + 1/3 \times 3.14 \times (2)^2 \times 2]\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

अब, मान लीजिए कि दिए गए ठोस के परिगत लंब वृत्तीय बेलन है। इस लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या = HP = BO = 2 cm है तथा इसकी ऊँचाई

EH = AO + OP = (2 + 2) cm = 4 cm है।

अतः, वांछित आयतन = लंब वृत्तीय बेलन का आयतन – खिलौने का आयतन

$= (3.14 \times 22 \times 4 - 25.12)\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

इस प्रकार, दोनों आयतनों का अंतर = 25.12 cm^3 है।

एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपांतरण

एक ठोस आकृति को अन्य आकार के दूसरे ठोस आकृति में परिवर्तित करने पर आकर में रूपांतरण हो जाता हैं जबकि आयतन में किसी प्रकार का कोई परिवर्तन नहीं होता है। उदाहरण के लिए पांच

लीटर की बाल्टी से पानी एक गोलाकार घड़े में डाला जाता है तब आकृति में रूपांतरण होता है जबकि आयतन एक समान रहता है। एक उदाहरण केमाध्यम से इसे समझने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण

मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल:

शंकु का आयतन = $1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ cm^3

यदि गोले की त्रिज्या r है तो उसका आयतन $4/3\ \pi r^3$ है।

चूँकि शंकु के रूप में और गोले के रूप में मिट्टी के आयतन बराबर हैं, इसलिए

$= 4/3\ \pi r^3 = 1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

अर्थात् $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

अतः $r = 3 \times 2 = 6$

इसलिए, गोले की त्रिज्या 6 cm है।

उदाहरण

सेल्वी के घर की छत पर बेलन के आकार की एक टंकी है। इस टंकी में एक भूमिगत टंकी में भरे पानी को पंप द्वारा पहुँचा कर टंकी को भरा जाता है। यह भूमिगत टंकी एक घनाभ के आकार की है, जिसकी विमाएँ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm हैं। छत की टंकी की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 95 cm है। यदि भूमिगत टंकी पानी से पूरी भरी हुई थी, तो उससे छत की टंकी को पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में पानी कितनी ऊँचाई तक रह जाएगा? छत की टंकी की धारिता की भूमिगत टंकी की धारिता से तुलना कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल:

छत की टंकी का आयतन = भूमिगत टंकी से निकाले गए पानी का आयतन

अब, छत की टंकी (बेलन) का आयतन = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95\ m^3$

भूमिगत टंकी के पानी से पूरी भरी होने पर पानी का आयतन

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95\ m^3$

छत की टंकी को पानी से पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी का आयतन

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) – (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]\ m^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)\ m^3$

इसलिए, भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी की ऊँचाई = (उसमें बचे पानी का आयतन)/($l \times b$)

$= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)/(1.57 \times 1.44)\ m$

$= 0.475\ m = 47.5\ cm$

साथ ही, (छत की टंकी की धारिता)/ (भूमिगत की टंकी की धारिता)

$= (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)/ (1.57 \times 1.44 \times 0.95) = 1/2$

अतः, छत की टंकी की धारिता भूमिगत टंकी की धारिता की आधी है।

शंकु का छिन्नक

एक दिए हुए शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटते हैं और इस तल के एक ओर बने शंकु को हटा देते हैं, तो तल के दूसरी ओर बचे शंकु के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं। हम शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? इसे एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण

हनुमप्पा और उसकी पत्नी गंगाम्मा गन्ने के रस से गुड़ बना रहे हैं। उन्होंने गन्ने के रस को गर्म करके राब (शीरा) बना ली है, जिसे शंकु के छिन्नक के आकार के साँचों में डाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमशः 30 cm और 35 cm हैं तथा साँचे की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 14 cm है। यदि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान लगभग 1.2 g है तो प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का द्रव्यमान ज्ञात करें। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

हल

चूँकि साँचा एक शंकु के छिन्नक के आकार का है, इसलिए इसमें भरी जा सकने वाली राब का आयतन = $\pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

जहाँ r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है और r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

$= 1/3 \times 22/7 \times 14[(35/2)^2 + (30/2)^2 + (35/2 \times 30/2)]\ cm^3 = 11641.7\ cm^3$

यह दिया है कि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान 1.2 g है। अतः प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का भार द्रव्यमान = (11641.7 × 1.2) g

= 13970.04g = 13.97 kg = 14 kg (लगभग)

उदाहरण

धातु से बनी एक खुली बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है, जो उसी धातु के बने एक खोखले बेलनाकार आधार पर आरोपित है (देखिए आकृति 13-23)। इस बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 45 cm और 25 cm हैं तथा बाल्टी की कुल ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 40 cm और बेलनाकार आधार की ऊँचाई 6 cm है। इस बाल्टी को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि हम बाल्टी की मुठिया (या हत्थे) को इसमें सम्मिलित नहीं कर रहे हैं। साथ ही, उस पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जो इस बाल्टी में धारण कर सकता है। (π = 22/7 लीजिए)

हल

बाल्टी की कुल ऊँचाई = 40 cm है, जिसमें आधार की ऊँचाई भी सम्मिलित है। इसलिए शंकु के छिन्नक की ऊँचाई (40 – 6) cm = 34 cm है।

अतः, शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{\{h^2 + (r_1 - r_2)^2\}}$

जहाँ r_1 = 22.5 cm, r_2 = 12.5 cm और h = 34 cm

अतः $l = \sqrt{\{34^2 + (22.5 - 12.5)^2\}}$

$= \sqrt{\{34^2 + 10^2\}} = 35.44$ cm

इसमें प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल = शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\,\pi \times 12.5 \times 6]\ cm^2$

$= 22/7 \times [1240.4 + 156.25 + 150]\ cm^2$

$= 4860.9\ cm^2$

अब, बाल्टी में आ सकने वाले पानी का आयतन, जिसे बाल्टी की धारिता भी कहते हैं

$= (\pi \times h)/3\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

$= 22/7 \times 34/3 \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$

$= 22/7 \times 34/3 \times 943.75\ cm^3 = 33615.48\ cm^3$

= 33.62 लीटर (लगभग)

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

किसी शंकु के छिन्नक के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है:

छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi l(r_1 + r_2)$, जहाँ l तिर्यक ऊँचाई है. जहाँ l छिन्नक की तिर्यक लम्बाई है r_1 बड़े आधार वाले भाग की त्रिज्या है जबकि r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

शंकु के छिन्नक का आयतन

शंकु के छिन्नक का आयतन निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

$= \pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

जहाँ h छिन्नक की ऊंचाई है r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है तथा r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

उदाहरण

एक शंकु के छिन्नक, जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए)

हल:

इस छिन्नक को दो लंब वृत्तीय शंकुओं OAB और OCD के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

मान लीजिए सेंटीमीटर में शंकु OAB की ऊँचाई h_1 है और तिर्यक ऊँचाई l_1 है, अर्थात् OP = h_1 और OA = OB = l_1 है।

मान लीजिए शंकु OCD की सेंटीमीटर में ऊँचाई h_2 और तिर्यक ऊंचाई l_2 है।

हमें r_1 = 28 cm, r_2 = 7 cm और छिन्नक की ऊँचाई h = 45 cm है।

साथ ही $h_1 = 45 + h_2$ (1)

सबसे पहले हमें क्रमशः शंकुओं OAB और OCD की ऊँचाइयों h_1 और h_2 को निर्धारित करना आवश्यक है।

चूँकि त्रिभुज OPB और OQD समरूप हैं (क्यों?), इसलिए हमें प्राप्त है:

$h_1/ h_2 = 28/7 = 4/1$ (2)

(1) और (2) से हमें $h_2 = 15$ और $h_1 = 60$ प्राप्त होता है

अब, छिन्नक का आयतन = शंकु OAB का आयतन – शंकु OCD का आयतन

$= [1/3 \times 22/7 \times (28)^2 \times 60 - 1/3 \times 22/7 \times (7)^2 \times 15]\ cm^3 = 48510\ cm^3$

शंकु OAB तथा शंकु OCD की तिर्यक ऊँचाइयाँ क्रमशः l_1 और l_2 नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होती हैं:

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55$ cm

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 66.20$ cm

इस प्रकार छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= 22/7 \times 28 \times 66.20 - 22/7 \times 7 \times 16.55 = 54.61\ cm^2$

अब, छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 5461.5\ cm^2 + 22/7\ (28)^2\ cm^2 + 22/7\ (7)^2\ cm^2$

= = 5461.5 cm^2 + 2464 cm^2 + 154 cm^2 = 8079.5 cm^2

स्मरणीय तथ्य

- आधारभूत ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु और गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन (को मिलाने से) से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करना।
- ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के आयतन ज्ञात करना।
- जब किसी शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटकर एक छोटा शंकु हटा देते हैं, तो जो ठोस बचता है, वह शंकु का एक छिन्नक कहलाता है।

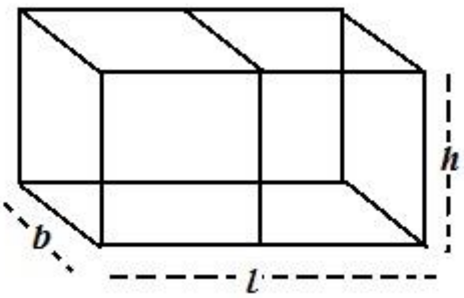
❖ दो घनों, जिनमे से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के सलंग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है | इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल:

एक घन का आयतन = 64 cm3

एक किनारा = (64)1/3

= 4 cm



दो घनों के फलकों को मिलाने पर

l = 4 + 4 = 8 cm

b = 4 cm

h = 4 cm

इसप्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + lh)

= 2(8×4 + 4×4 + 8×4)

= 2(32 + 16 + 32)

= 2×80

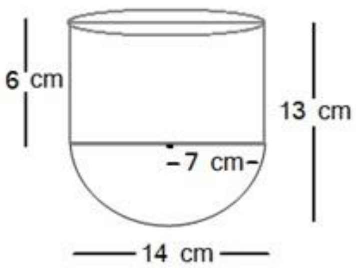
= 160 cm2

अत: इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल 160 cm2 है |

कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है | अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है | इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :

अर्धगोले का व्यास = 14 cm



अर्धगोले की त्रिज्या $r = \frac{14}{2}$ cm = 7 cm

बर्तन की कुल ऊँचाई H = 13 cm

बेलना भाग की ऊँचाई h = 13 cm - 7 cm = 6 cm

बेलनाकार भाग की त्रिज्या r = 7 cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

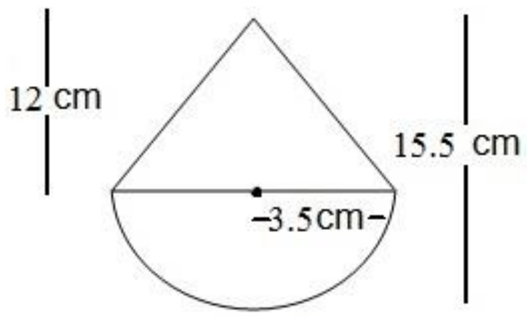
$= 2\times \frac{22}{7} \times 7(6 + 7)$

$= 44 \times 13$

$= 572 \text{ cm}^2$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 572 cm^2 है |

❖ एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोले पर अध्यारोपित है | इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है | इस खिलोने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल:

अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 15.5 – 3.5 = 12 cm

शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{12^2 + 3.5^2}$

$l = \sqrt{144 + 12.25}$

$l = \sqrt{156.25}$

$l = 12.5$ cm

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + 2\pi r^2$

$= \pi r(l + 2r)$ [दोनों त्रिज्या बराबर रहने पर]

$= \frac{22}{7} \times 3.5(12.5 + 2 \times 3.5)$

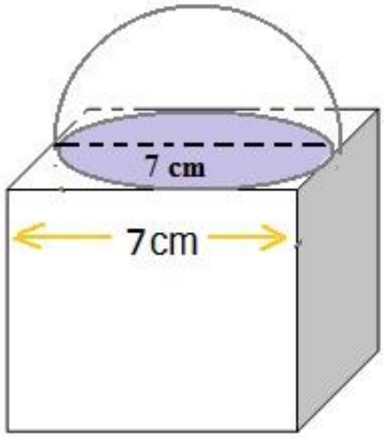
$= 22 \times 0.5(12.5 + 7)$

$= 11(19.5)$

$= 214.5\ cm^2$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5 cm^2 है |

❖ भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लाक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है | अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है ? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7 cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास d = 7 cm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

⇒ ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6a2 + 2πr2 – πr2

= 6a2 + πr2   [a = घन का एक किनारा]

$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

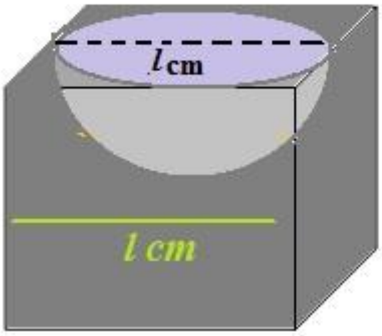
$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$

$= 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2$

अत: ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm^2

❖ घनाकार ब्लाक के एक फलक को अन्दर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है की अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है | शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



माना अर्धगोले का व्यास d = l इकाई

अत: त्रिज्या r = $\frac{l}{2}$ इकाई

और घन का एक किनारा a = l इकाई

(चूँकि घन का किनारा अर्धगोले के ब्यास के बराबर है)

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

= 6a2 + 2πr2 – πr2 [a = घन का एक किनारा]

= 6a2 + πr2

$= 6\,l^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$

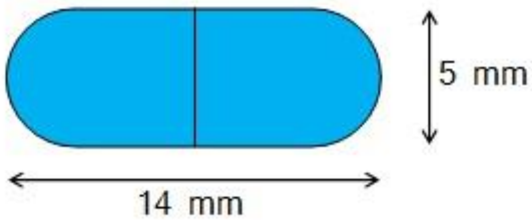
$= 6\,l^2 + \pi\frac{l^2}{4}$

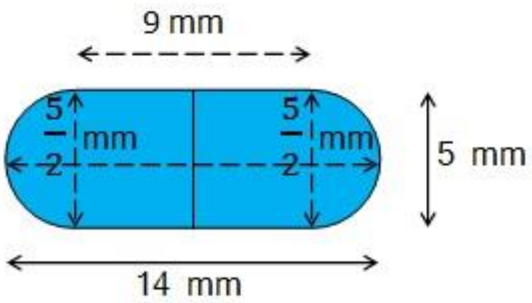
$= \frac{24\,l^2 + \pi\,l^2}{4}$

$= \frac{1}{4}(24 + \pi)\,l^2$ वर्ग इकाई

❖ दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक – एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 13.10) | पुरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज़ात कीजिए |

हल





यहाँ बेलन का ब्यास, अर्धगोले के ब्यास के बराबर है |

अत: अर्धगोले का ब्यास D = 5 mm

इसलिए, त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

और बेलन का ब्यास d = 5 mm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

बेलन की ऊँचाई h = कैप्सूल की लंबाई - 2r

h = 14 mm - 5 [चूँकि 2r = D]

= 9 mm

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2 × 2πr2 + 2πrh

= 2πr(2r + h)

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2}\ (5 + 9)$$

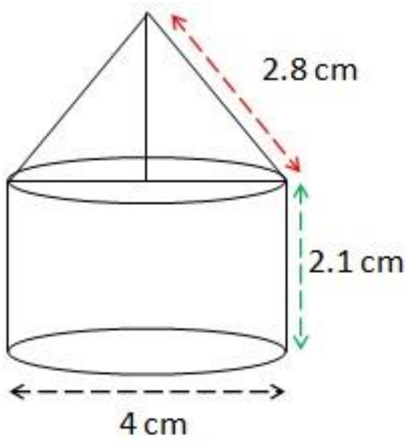
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times 14$$

$$= 2 \times 22 \times 5$$

$$= 220\ mm^2$$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 220\ mm^2$

- कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु आध्यारोपित है | यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और क्रमशः 2.1 m और 4 m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | साथ ही, 500 रू प्रति m2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए | (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है |)



हल :

तम्बू के बेलनाकार भाग का ब्यास = 4 cm

अत: त्रिज्या r = 2 cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई h = 2.1 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = 2.8 cm

ब्यास = 4 cm

और त्रिज्या r = 2 cm

इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi rl$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2.1 + \frac{22}{7} \times 2 \times 2.8$

$= \frac{22}{7} \times 2\,(2 \times 2.1 + 2.8)$

$= \frac{44}{7}(4.2 + 2.8)$

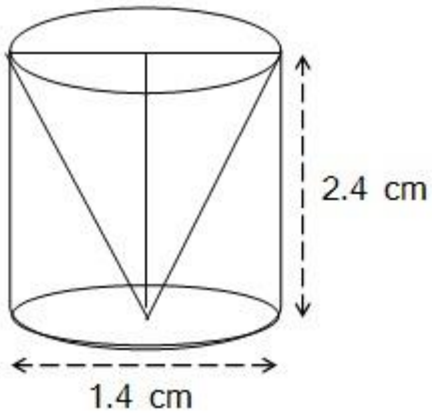
$= \frac{44}{7} \times 7$

$= 44\ cm^2$

कैनवास का लागत = 44 × 500 = ₹ 22000 |

❖ ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है |शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



बेलन की ऊँचाई h = 2.4 cm

बेलन का ब्यास = 1.4 cm

अत: बेलन की त्रिज्या r = 0.7 cm

काटे गए शंकु की ऊँचाई h = 2.4 cm

और त्रिज्या r = 0.7 cm

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2}$

$l = \sqrt{5.76 + 0.49}$

$l = \sqrt{6.25}$

$l = 2.5$ cm

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के पेंदी का क्षेत्रफल

= 2πrh + πrl + πr2

= πr(2h + l + r)

$= \frac{22}{7} \times 0.7\,(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$

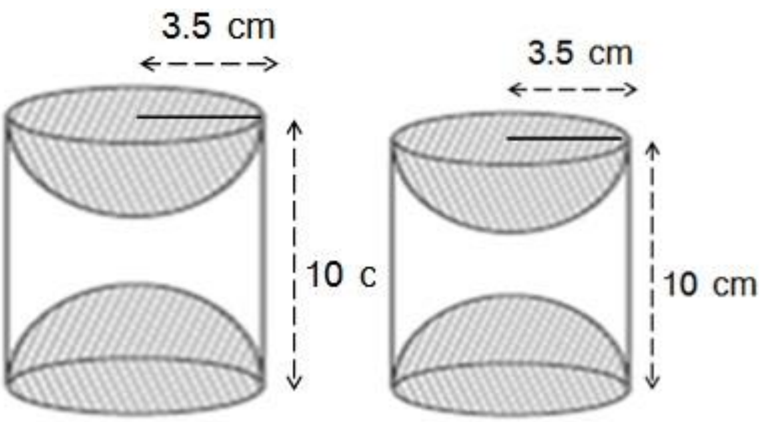
$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$

$= \frac{22}{10} \times (8.0)$

$= \frac{176}{10}$

$= 17.6\ cm^2$

❖ लकड़ी के ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति 13.11 में दर्शाया गया है | यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

बेलन की ऊँचाई = 10 cm

आधार की त्रिज्या = 3.5 cm

अर्धगोले की त्रिज्या = 3.5 cm

वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + उपरी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + निचली अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r2 + 2\pi r2$

$= 2\pi r(h + r + r)$

$= 2\pi r(h + 2r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5\,(10 + 2 \times 3.5)$

$= 2 \times \frac{110}{10}(10 + 7)$

$= \frac{110 \times 34}{10}$

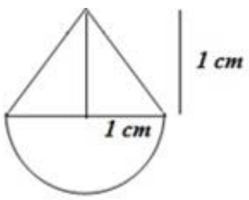
$= \frac{3740}{10}$

$= 374\ cm^2$

❖ एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है | इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए |

हल :

शंकु की त्रिज्या r = 1 cm



शंकु की ऊँचाई = 1 cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 1 cm

ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(2r + h)$

$= \frac{1}{3}\pi\ (1)^2[2(1) + 1]$

$= \frac{1}{3}\pi\ [3]$

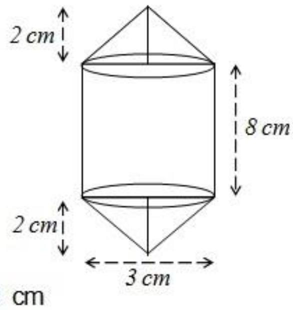
$= \pi\ cm^3$

ठोस का आयतन $\pi\ cm^3$

❖ एक इंजीनियरिंग के विधार्थी रचेल से एक पतली एल्युमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों | इसा मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है | यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज़ात कीजिए|

(यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर है |)

हल :



शंकु की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5$ cm

शंकु की ऊँचाई $h = 2$ cm

बेलन की त्रिज्या $r = 1.5$ cm

बेलन की ऊँचाई $H = 12 - 2 - 2 = 8$ cm

मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन = 2(शंकु का आयतन) + बेलन का आयतन

$= 2(\frac{1}{3}\pi r^2 h) + \pi r^2 H$

$= \pi r^2(\frac{2}{3} h + H)$

$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 (\frac{2}{3} \times 2 + 8)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times \frac{15}{10} \left(\frac{4+24}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \left(\frac{28}{3}\right)$

$= 22 \times 3$

$= 66 \text{ cm}^3$

अत: मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन 66 cm^3 है |

❖ एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है | 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है

हल :

अर्धगोलाकार सिरे का ब्यास = 2.8 cm

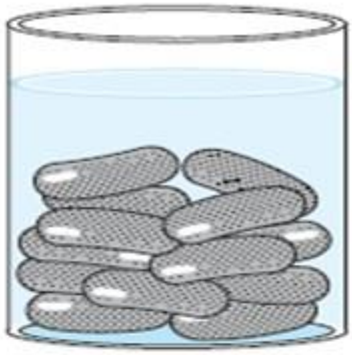
तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या r = 1.4 cm

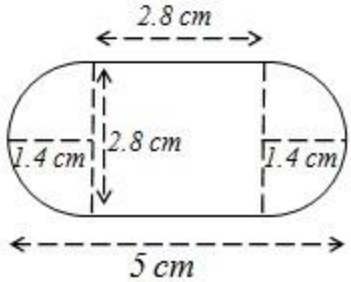
पुरे गुलाब जामुन की लम्बाई l = 5 cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई h = 5 - (1.4 + 1.4)

= 5 - 2.8 cm

= 2.2 cm





सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45(अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन)

$= 45\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2\right)$

$= 45\ \pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h + \frac{2}{3}r\right)$

$= 45\left[\frac{22}{7}(1.4)^2\left(\frac{2}{3}\times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3}\times 1.4\right)\right]$

$= 45\left[\frac{22}{7}\times\frac{14}{10}\times\frac{14}{10}\left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{44\times 14}{100}\left(\frac{5.6}{3} + 2.2\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{5.6 + 6.6}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{12.2}{3}\right)\right]$

$= \frac{15\times 616\times 122}{1000}$

$= \frac{1127280}{1000}$

$= 1127.280\ cm^3$

चासनी की मात्रा = 1127.280 cm^3 का 30%

$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

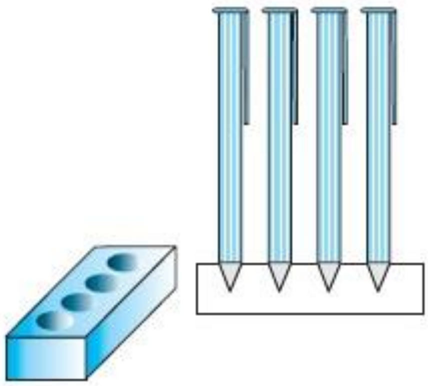
$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

$= 338.1840\ cm^3$

अत: 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338 cm^3 है |

एक कमलदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना हा जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं | घनाभ की विमाएँ 15 cm x 10 cm x 3.5 cm हैं | प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है | पुरे कमलदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए

हल :



धनाभ की लंबाई l = 15 cm

घनाभ की चौड़ाई b = 10 cm

घनाभ की ऊँचाई h = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

ऊँचाई (h) = 1.4 cm

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन = घनाभ का आयतन – चरों शंक्वाकार गढ्ढे का आयतन

$= l \times b \times h - 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

$= 15 \times 10 \times 3.5 - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4\right)$

$= 525 - 4\left(\frac{1}{3} \times 22 \times 0.25 \times 0.2\right)$

$= 525 - \left(\frac{1}{3} \times 4.4\right)$

$= 525 - \frac{4.4}{3}$

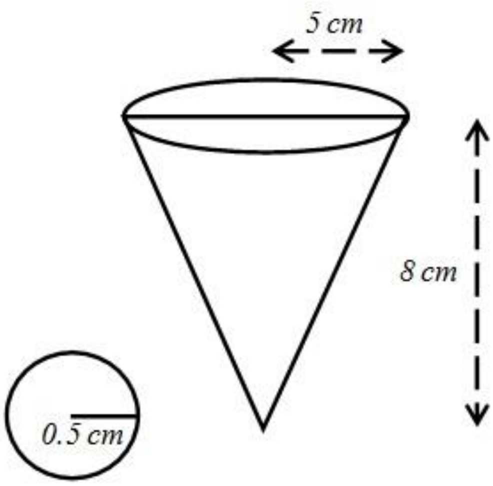
$= 525 - 1.47$

$= 523.53 \text{ cm}^3$

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन 523.53 cm^3 है |

❖ एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है | इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm त्रिज्या है | यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है | जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमे प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है | बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए |

हल :



शंकु की ऊँचाई (h) = 8 cm

शंकु की त्रिज्या (R) = 5 cm

गोली की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

माना बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = n

अत: n × (गोली का आयतन) = $\frac{1}{4}$ (शंकु का आयतन)

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

सरलीकरण करने पर

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times R^2 \times h$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.125 = \frac{1}{3} \times 25 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.125}$$

$$\Rightarrow \quad n = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{125}$$

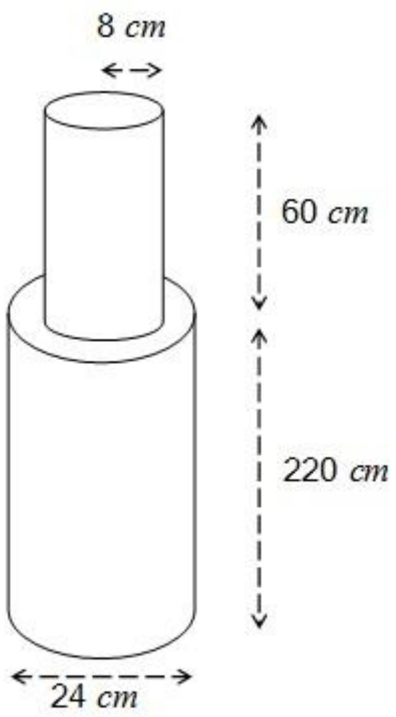
$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{5}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{500}{5} = 100$$

अत: गोलियों की संख्या 100 है।

ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का स्तंभ बना है | इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है | (π = 3.14 लीजिए |)

हल :



मोटे बेलन की ऊँचाई (H) = 220 cm

व्यास (d) = 24 cm

अत: त्रिज्या (R) = 12 cm

पतले बेलन की ऊँचाई (h) = 60 cm

त्रिज्या (r) = 8 cm

अब लौह स्तंभ का आयतन = $\pi R^2H + \pi r^2h$

$= \pi(R^2H + r^2h)$

$= 3.14\ (12\times12\times220 + 8\times8\times60)$

$= 3.14\ (31680 + 3840)$

$= 3.14\ (35520)$

$= 111532.8\ cm^3$

लोहे का द्रव्यमान = $111532.8\ cm^3 \times 8$

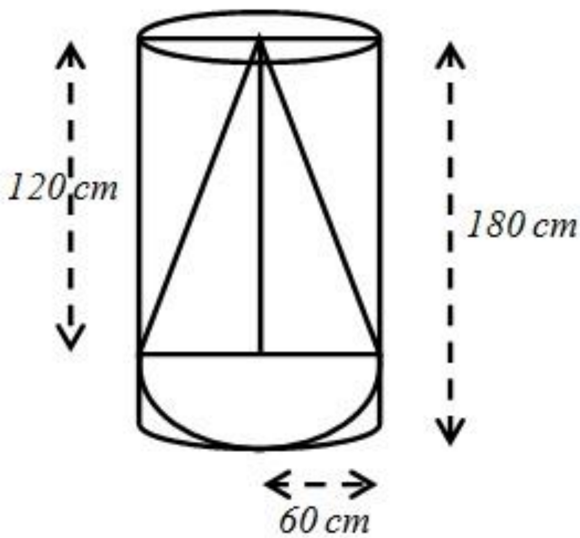
$= 892262.4\ g$

अब द्रव्यमान kg में = $\frac{892262.4}{1000} = 892.2624$ kg

अर्थात लौह सतंभ का द्रव्यमान 892.26 kg है |

एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है | इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे | यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए |

हल :



ठोस के शंकु की ऊँचाई (h) = 120 cm

ठोस के शंकु की त्रिज्या (r) = 60 cm

ठोस के अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 60 cm

बड़े बेलन की ऊँचाई (H) = 180 cm

बड़े बेलन की की त्रिज्या (r) = 60 cm

शेष बचे पानी का आयतन = बड़े बेलन का आयतन – ठोस का आयतन

$$= \pi r^2 H - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \pi r^2 \left[H - \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{3} r\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left[180 - \left(\frac{1}{3} \times 120 + \frac{2}{3} \times 60\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - (40 + 40)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - 80]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [100]$$

$$= \frac{22 \times 360000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{7920000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= 1131428.57 \text{ cm}^3$$

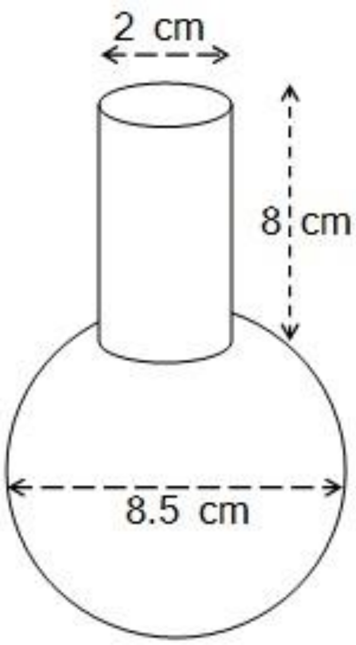
या आयतन घन मीटर में $= \dfrac{1131428.57}{100 \times 100 \times 100} \text{ m}^3$

$= 1.131 \text{ m}^3$ (लगभग)

❖ एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है | इसमें भरे जा सकने वाली

पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm3 है | जाँच कीजिए कि बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए की उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और π = 3.14 |

हल :



गोलाकार भाग का व्यास = 8.5 cm

गोलाकार भाग का त्रिज्या (R) = $\frac{8.5}{2}$ cm

बेलनाकार गर्दन की ऊँचाई (h) = 8 cm

गर्दन का व्यास (d) = 2 cm

इसलिए, त्रिज्या (r) = 1 cm

इसमें भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi r^2 h$$

$$= 3.14 \left(\frac{4}{3} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} + 1 \times 1 \times 8 \right)$$

$$= 3.14 \left(\frac{8.5 \times 8.5 \times 8.5}{3 \times 2} + 8 \right)$$

$$= 3.14 \left(\frac{614.125 + 48}{6} \right)$$

$$= 3.14 \left(\frac{662.125}{6} \right)$$

$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

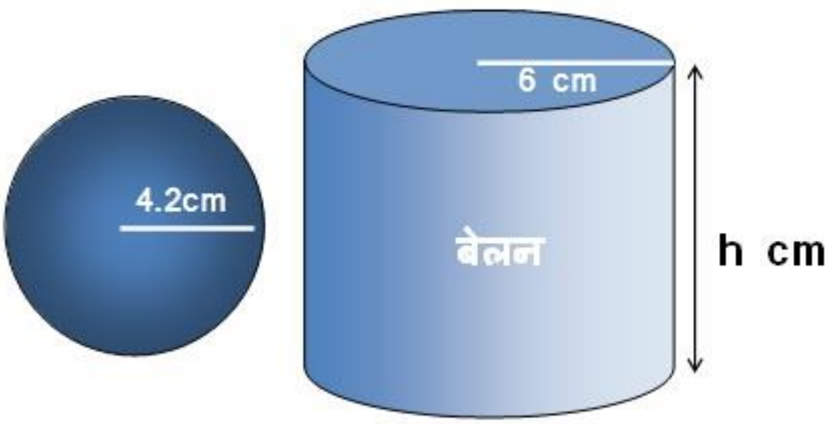
$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

$$= 346.51 \text{ cm}^3$$

अत: बच्चे द्वारा ज्ञात माप सही नहीं है |

❖ त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है | बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल :



धातु के गोले की त्रिज्या (r) = 4.2 cm

बेलन की त्रिज्या (R) = 6 cm और

माना बेलन की ऊँचाई h cm है |

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \quad \pi R^2 h = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad R^2 h = \frac{4}{3} r^3$$

$$\Rightarrow \quad 6^2 h = \frac{4}{3} (4.2)^3$$

$$\Rightarrow \quad 36 h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 36}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 9} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74 \text{ cm}$$

❖ क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है | इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए |

हल : माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया है : r_1 = 6 cm, r_2 = 8 cm और r_3 = 10 cm

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi (r_1)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_2)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_3)^3$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi (R)^3 = \frac{4}{3}\pi [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते हैं -

$\Rightarrow (R)^3 = [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [(6)^3 + (8)^3 + (9)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [216 + 512 + 1000]$

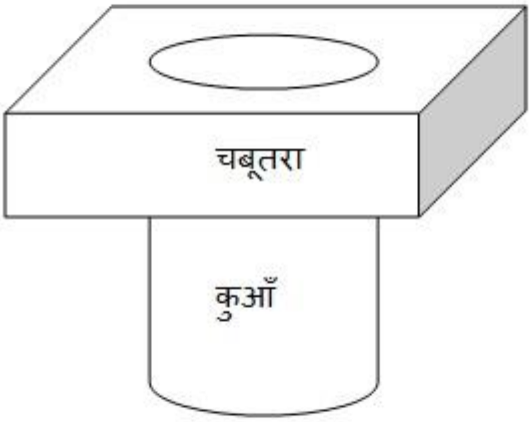
$\Rightarrow (R)^3 = 1728$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1728}$

$\Rightarrow R = 12$

अत: नए गोले की त्रिज्या 12 cm है |

- व्यास 7 m वाला 20 m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 m x 14 m वाला एक चबूतरा बनाया गया है | इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 7 m

अत: कुएँ की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

कुएँ की गहराई (h) = 20 m

चबूतरे की लम्बाई (l) = 22 m और चौड़ाई (b) = 14 m

माना चबूतरे की ऊँचाई = h m

चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$l \times b \times h = \pi r^2 h$

$22 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20 \text{ m}$

$\Rightarrow 22 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20$

$\Rightarrow h = \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 20}{7 \times 14 \times 22}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 35 \times 20}{7 \times 14 \times 10 \times 10}$

$\Rightarrow h = \frac{5 \times 35 \times 2}{14 \times 10}$

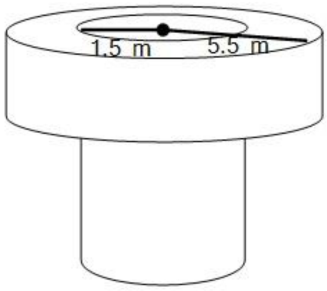
$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m}$

अत : चबूतरे की ऊँचाई = 2.5 m

❖ व्यास 3 m वाला 14 m गहरा की गहराई तक खोदा जाता है | इससे निकली हुई मिट्टी को कुँए के चारों ओर 4 m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है | इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 3 m

कुएँ की त्रिज्या (r) = $\frac{3}{2}$ m = 1.5 m

कुएँ की गहराई (H) = 14 m

कुएँ के चारों वृत्ताकार वलय की चौड़ाई = 4 m

अत: वलय की बाह्य त्रिज्या (R) = 4 m + 1.5 = 5.5 m

माना वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = h m

वलयाकार चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$\Rightarrow \pi R^2h - \pi r^2h = \pi r^2H$

$\Rightarrow \pi h (R^2 - r^2) = \pi r^2H$

$\Rightarrow h (R^2 - r^2) = r^2H$

$\Rightarrow h [(5.5)^2 - (1.5)^2] = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h (5.5 + 1.5) (5.5 - 1.5) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$[a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$\Rightarrow h (7 \times 4) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{7 \times 4}$

$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5}{2}$

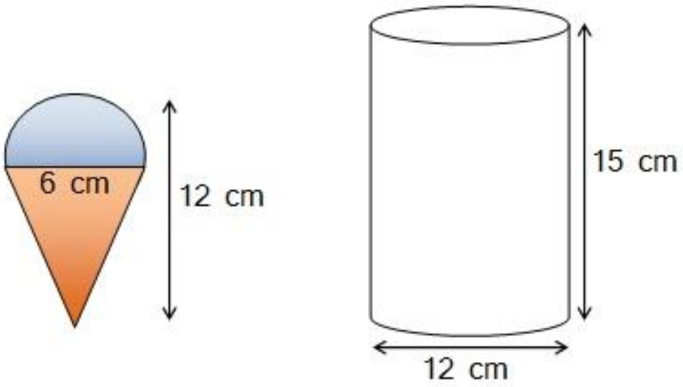
$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2}$

$\Rightarrow h = 1.125$ m

अत : वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = 1.125 m

❖ व्यास 12 cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है | इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12 cm और व्यास 6 cm वाले शकुओं में

भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा | उन शंकुओं की संख्या ज़ात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं |



हल : बेलनाकार बर्तन का व्यास = 12 cm

तो बर्तन की त्रिज्या R = 6 cm

बर्तन की ऊँचाई H = 15 cm

आइसक्रीम की त्रिज्या r = $\frac{6}{2}$ = 3 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 12 cm

भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या = $\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{एक आइसक्रीम का आयतन}}$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\text{अर्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 (2r + h)}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\pi\, 6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\pi\, 3^2 (2\times 3 + 12)}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\, 3^2 (18)}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{36 \times 15}{3 \times 18}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{2 \times 15}{3}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{30}{3} = 10$$

अत: भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या 10 है |

❖ विमाओं 5.5 cm x 10 cm x 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ?

हल : सिक्कों का व्यास = 1.75 cm

त्रिज्या $r = \frac{1.75}{2}$ cm

सिक्के की ऊँचाई $h = 2$ mm $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ cm

माना चाँदी के सिक्कों की संख्या n है |

अत: n चाँदी के सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$\Rightarrow n(\pi r^2 h) = l \times b \times h$

$$\Rightarrow n = \frac{l \times b \times h}{\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 3.5\text{ cm}}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5}{22 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 100 \times 100}{22 \times 175 \times 175 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 2 \times 5 \times 100}{11 \times 25 \times 175}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 2 \times 100}{11 \times 25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5 \times 10 \times 2 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10 \times 2 \times 100}{5} = 2 \times 2 \times 100 = 400$$

अत: सिक्कों की संख्या 400 है |

❖ 32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है | इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेते की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है | यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल : बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या R = 18 cm

और ऊँचाई H = 32 cm

शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई = 24 cm

बेलनाकार बाल्टी की आयतन = πR^2H

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2h$

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = बेलनाकार बाल्टी की आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2h = \pi R^2H$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} r^2 \times 24 = \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 24 = 18 \times 18 \times 32$

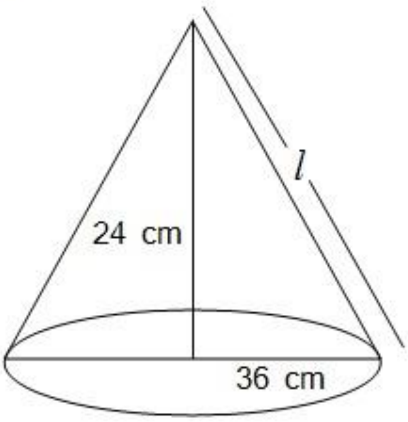
$\Rightarrow r^2 \times 8 = 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow r^2 = \frac{18 \times 18 \times 32}{8}$

$\Rightarrow r^2 = 18 \times 18 \times 4$

$\Rightarrow r = \sqrt{18 \times 18 \times 4}$

$\Rightarrow r = 36$



$l = \sqrt{24^2 + 36^2}$

$l = \sqrt{(12 \times 2)^2 + (12 \times 3)^2}$

$l = \sqrt{12^2 \times 2^2 + 12^2 \times 3^2}$

$l = \sqrt{12^2 (2^2 + 3^2)} = 12\sqrt{(2^2 + 3^2)}$

$l = 12\sqrt{4+9} = 12\sqrt{13}\ cm$

❖ m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km /h की चाल से बह रहा है | 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के ल;इए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है |

हल : 1 घंटे में नहर की लंबाई l = 10km = 10000 m

नहर की चौड़ाई b = 6 m

नहर की गहराई h = 1.5 m

1 घंटे में नहर में पानी का आयतन = $l \times b \times h$

$= 10000 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$

$= 90000 \text{ m}^3$

अत: 30 मिनट में पानी का आयतन = $\frac{90000}{2} \text{ m}^3$

$= 45000 \text{ m}^3$

सिंचाई के लिए पानी की ऊँचाई = 8 cm = $\frac{8}{100}$ m

अब, क्षेत्रफल × उचाई = आयतन

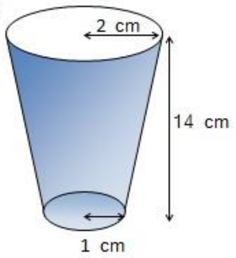
$\Rightarrow$ क्षेत्रफल × $\frac{8}{100} = 45000 \text{ m}^3$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = $45000 \text{ m}^3 \times \frac{100}{8}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = 562500 m^2

अत: सिंचाई के लिए 562500 m^2 क्षेत्रफल की जरुरत है |

❖ पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है | दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं | इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए |



हल : छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14 cm

उपरी सिरे का व्यास = 4 cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2 cm

निचली सिरे का व्यास = 2 cm

निचली सिरे की त्रिज्या r = 1 cm

गिलास की धारिता = $\frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2 (4 + 1 + 2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$$

$$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

❖ एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं | इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज़ात कीजिए |

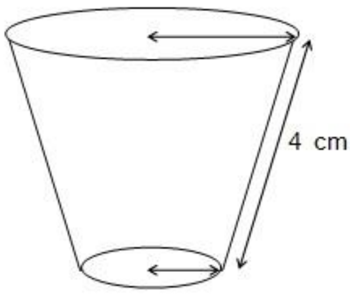
हल :

शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) = 4 cm

उपरी सिरे का परिमाप = 18 cm

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$



निचले सिरे का परिमाप = 6 cm

$$2\pi r = 6$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi l (R + r)$

$$= \pi \times 4\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)$$

$$= \pi \times 4\left(\frac{12}{\pi}\right)$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$

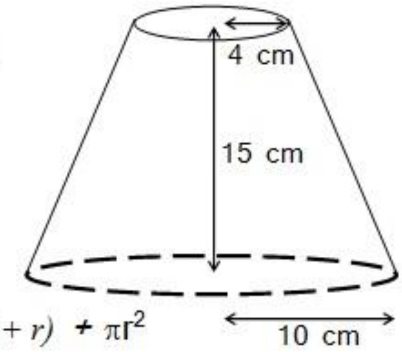
अत : छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 48 cm^2 है |

❖ एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकर की है (देखिये आकृति 13.24) | यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज़ात कीजिए |

हल : टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = 15 cm

खुले सिरे की त्रिज्या (R) = 10 cm

ऊपरी सिरे की त्रिज्या (r) = 4 cm



बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल = $\pi l\,(R+r) + \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 15\,(10+4) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4$$

$$= \frac{22}{7} \times 15\,(14) + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7} \times 210 + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7}(210 + 16)$$

$$= \frac{22}{7}(226)$$

$$= \frac{4972}{7}\ \text{cm}^2$$

$$= 710\frac{2}{7}\ \text{cm}^2$$

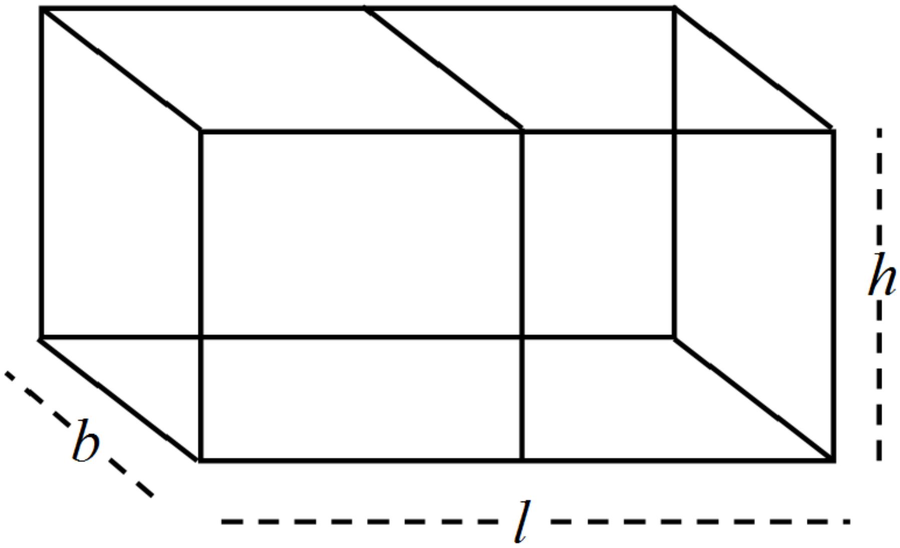
NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 13.1 (पृष्ठ संख्या 268-269)

प्रश्न 1 दो घनों, जिनमे से प्रत्येक का आयतन 64cm^3 है, के सलंग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक घन का आयतन = 64cm^3

एक किनारा $= 64\frac{1}{3} = 4cm$



दो घनों के फलकों को मिलाने पर,

l = 4 + 4 = 8cm

b = 4cm

h = 4cm

इस प्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + lh)

= 2(8 × 4 + 4 × 4 + 8 × 4)

= 2(32 + 16 + 32)

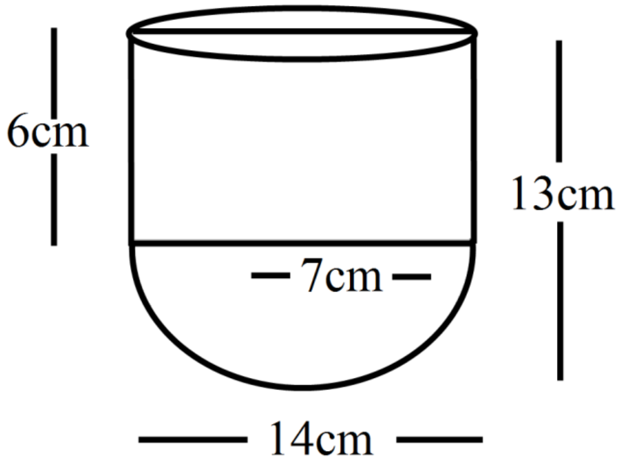
= 2 × 80

= $160cm^2$

अत: इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल $160cm^2$ है।

प्रश्न 2 कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



अर्धगोले का व्यास = 14cm

अर्धगोले की त्रिज्या $\mathrm{r} = \frac{14}{2}\mathrm{cm} = 7\mathrm{cm}$

बर्तन की कुल ऊँचाई H = 13cm

बेलना भाग की ऊँचाई h = 13cm - 7cm = 6cm

बेलनाकार की त्रिज्या r = 7cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi\mathrm{rh} + 2\pi\mathrm{r}^2$

$$= 2\pi\mathrm{r}(\mathrm{h} + \mathrm{r})$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(6 + 7)$$

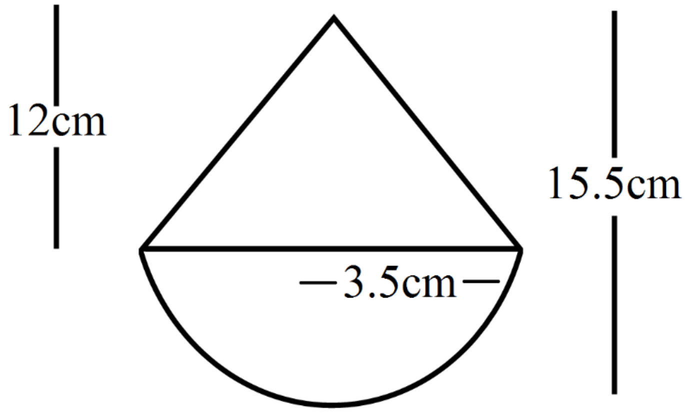
$$= 44 \times 13$$

$$= 572\mathrm{cm}^2$$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 572cm^2 है।

प्रश्न 3 एक खिलौना त्रिज्या 3.5cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5cm है। इस खिलोने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 15.5 - 3.5 = 12cm

शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $\mathrm{l} = \sqrt{\mathrm{h}^2 + \mathrm{r}^2}$

$$\mathrm{l} = \sqrt{12^2 + 3.5^2}$$

$$\mathrm{l} = \sqrt{144 + 12.25}$$

$$\mathrm{l} = \sqrt{156.25}$$

$$\mathrm{l} = 12.5\mathrm{cm}$$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi \mathrm{rl} + 2\pi \mathrm{r}^2$

$= \pi \mathrm{r}(\mathrm{l} + 2\mathrm{r})$ [दोनों त्रिज्या बराबर रहने पर]

$$= \frac{22}{7} \times 3.5(12.5 + 2 \times 3.5)$$

$$= 22 \times 0.5(12.5 + 7)$$

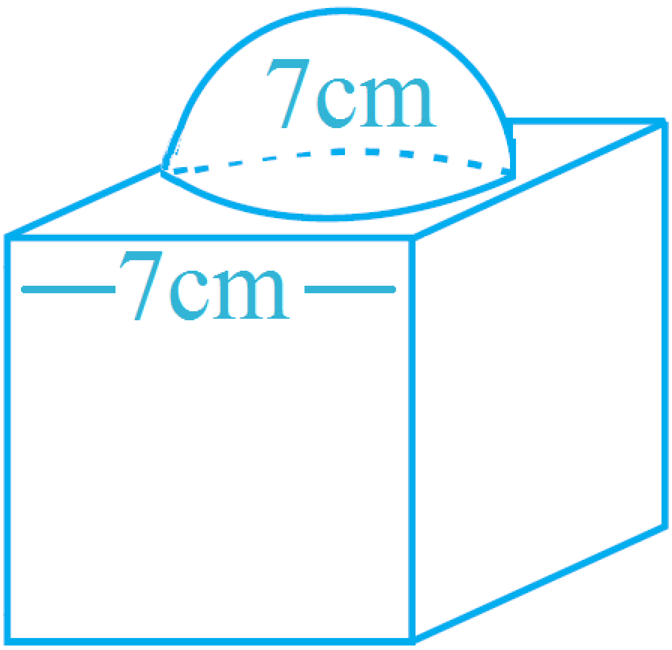
$$= 11(19.5)$$

$$= 214.5\text{cm}^2$$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5cm^2 है।

प्रश्न 4 भुजा 7cm वाले एक घनाकार ब्लाक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास d = 7cm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}\text{cm}$

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल - अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 6a^2 + \pi r^2$ [a = धन का एक किनारा]

$6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

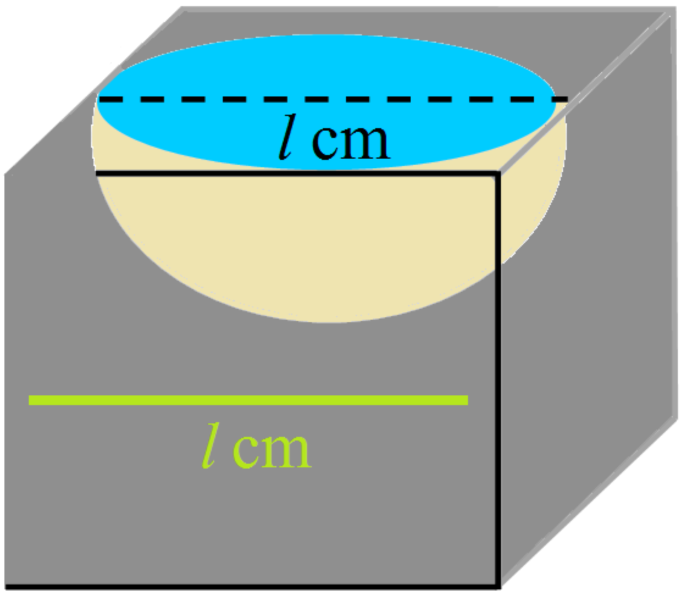
$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$

$= 294 + 38.5 = 332.5cm^2$

अतः ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $332.5cm^2$

प्रश्न 5 एक घनाकार ब्लाक के एक फलक को अन्दर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है की अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना अर्धगोले का व्यास d = l इकाई

अतः त्रिज्या r = $\frac{1}{2}$

और घन का एक किनारा a = l इकाई

(चूँकि घन का किनारा अर्धगोले के व्यास के बराबर है)

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल - अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

$= 6a^2 + 2\pi r - \pi r^2$ [a = घन का एक किनारा]

$= 6a^2 + \pi r^2$

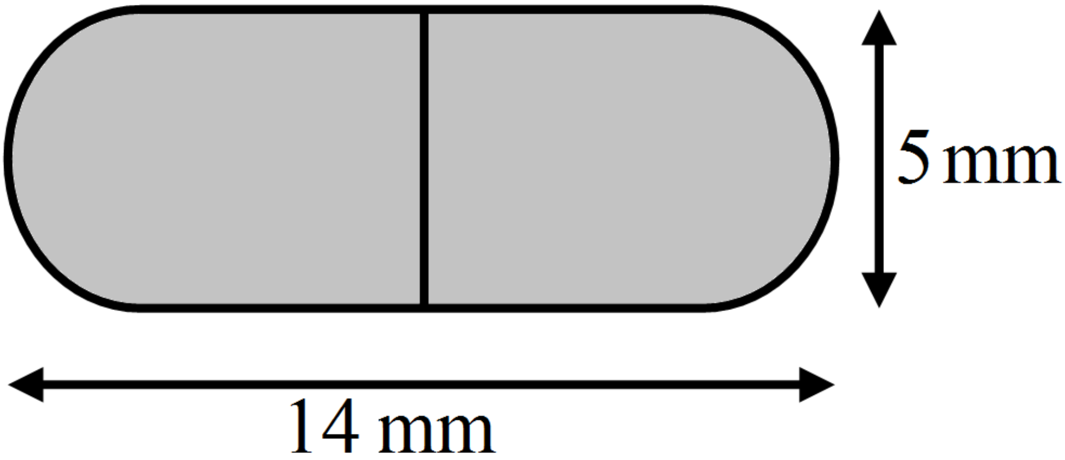
$= 6(l^2) + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= 6(l^2) + \pi\frac{l^2}{4}$

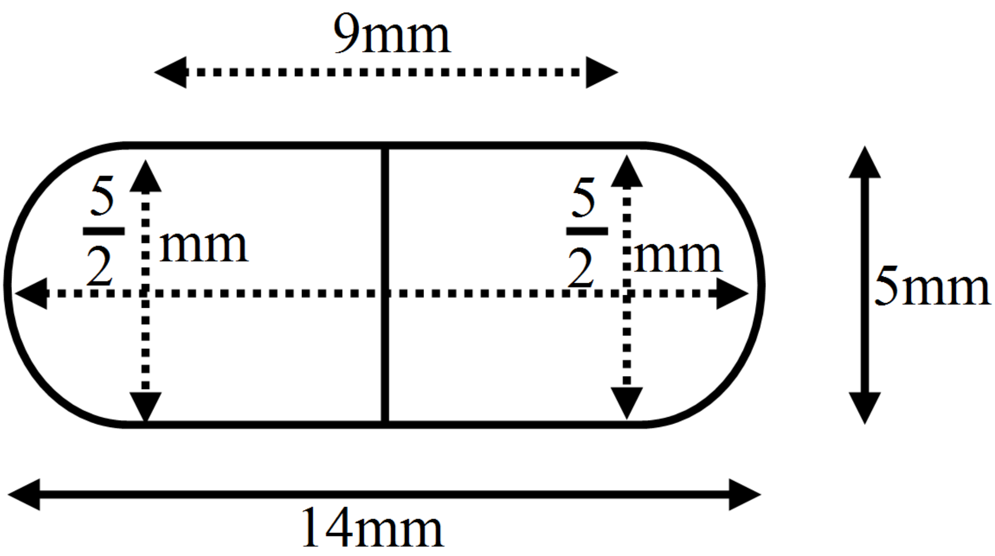
$= \frac{24(l^2)+\pi(l^2)}{4}$

$= \frac{1}{4}(24+\pi)(l^2)$ वर्ग इकाई

प्रश्न 6 दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति)। पुरे कैप्सूल की लंबाई 14mm है और उसका व्यास 5mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



यहाँ बेलन का ब्यास, अर्धगोले के ब्यास के बराबर है।

अत: अर्धगोले का ब्यास D = 5mm

इसलिए, त्रिज्या $\mathrm{r} = \frac{5}{2}\mathrm{mm}$

और बेलन का व्यास d = 5mm

$\therefore$ त्रिज्या $\mathrm{r} = \frac{5}{2}\mathrm{mm}$

बेलन की ऊँचाई h = कैप्सूल की लम्बाई - 2r

h = 14mm - 5 [चूँकि 2r = D]

= 9mm

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2 \times 2\pi \mathrm{r}2 + 2\pi \mathrm{rh}$$

$$= 2\pi \mathrm{r}(2\mathrm{r} + \mathrm{h})$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2}(5 + 9)$$

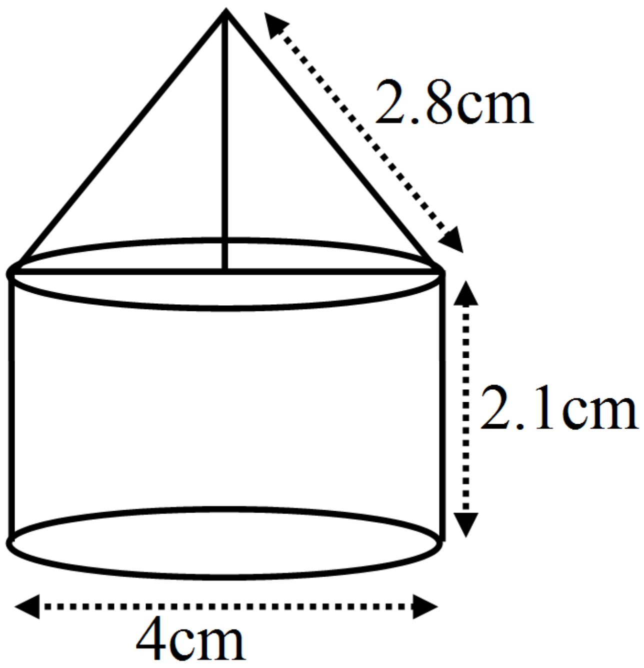
$= 2 \times 22 \times 5$

$= 220\text{mm}^2$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 220mm^2

प्रश्न 7 कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु आध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और क्रमशः 2.1m और 4m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, 500 रू प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है।)

उत्तर-



तम्बू के बेलनाकार भाग का ब्यास = 4cm

अत: त्रिज्या r = 2cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई h = 2.1cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई = 2.8cm

ब्याज = 4cm

और त्रिज्या r = 2cm

इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi rl$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2.1 + \frac{22}{7} \times 2 \times 2.8$$

$$= \frac{22}{7} \times 2(2 \times 2.1 + 2.8)$$

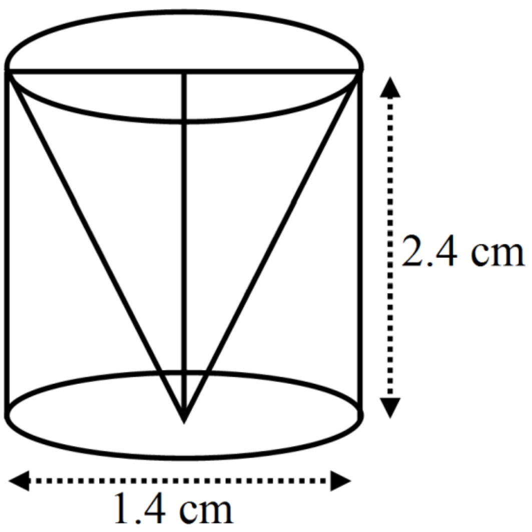
$$= \frac{44}{7} \times 7$$

$$= 44\text{cm}^2$$

केनवास का लागत = 44 × 500 = रू 22000

प्रश्न 8 ऊँचाई 2.4cm और व्यास 1.4cm वाले एक ठोस बेलन में से ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बेलन की ऊँचाई h = 2.4cm

बेलन का ब्यास = 1.4cm

अत: बेलन की त्रिज्या r = 0.7cm

काटे गए शंकु की ऊँचाई h = 2.4cm

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$l = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2}$$

$$l = \sqrt{5.76 + 0.49}$$

$$l = \sqrt{6.25}$$

$$l = 2.5\text{cm}$$

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के पेंदी का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + l + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$$

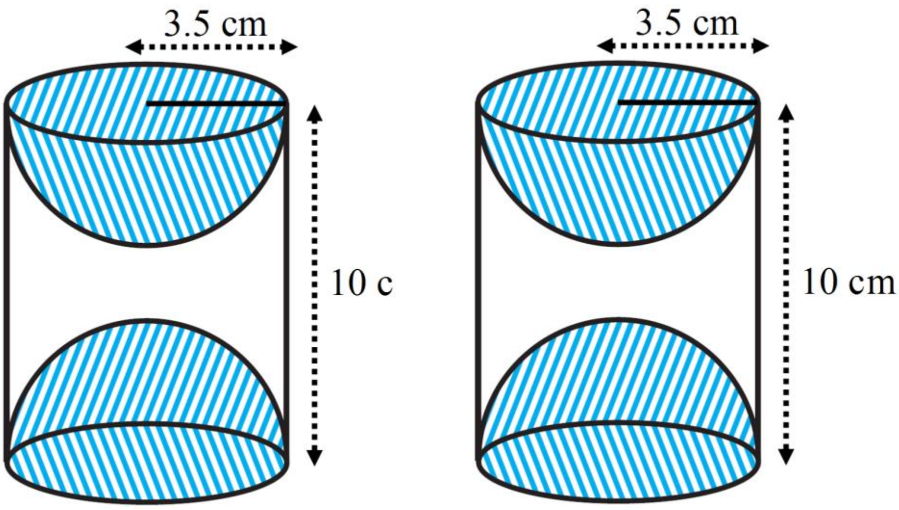
$$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$$

$$= \frac{22}{10} \times (8.0)$$

$$= \frac{176}{10}$$

$$= 17.6\text{cm}^2$$

प्रश्न 9 लकड़ी के ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10cm है और आधार की त्रिज्या 3.5cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- बेलन की ऊँचाई = 10cm

आधार की त्रिज्या = 3.5cm

अर्धगोले की त्रिज्या = 3.5cm

वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + उपरी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + निचली अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h + r + r)$$

$$= 2\pi r(h + 2r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(10 + 2 \times 3.5)$$

$$= 2 \times \frac{110}{10}(10 + 7)$$

$$= \frac{110 \times 34}{10}$$

$$= \frac{3740}{10}$$

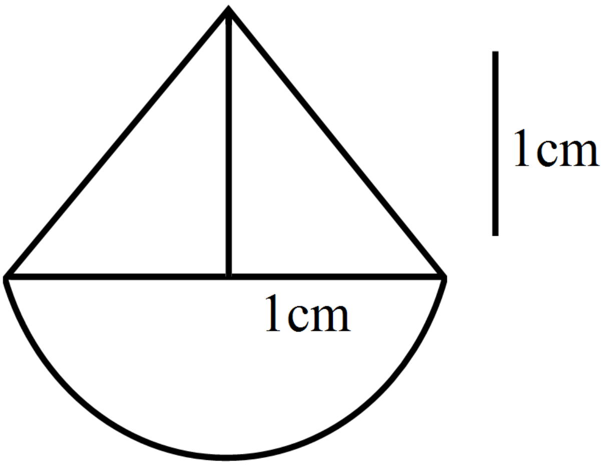
$$= 374 \text{cm}^2$$

अत: वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 374cm^2 है।

प्रश्नावली 13.2 (पृष्ठ संख्या 271-272)

प्रश्न 1 एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु की त्रिज्या r = 1cm

शंकु की ऊँचाई = 1cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 1cm

ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2(2r + h)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(1)^2[2(1) + 1]$$

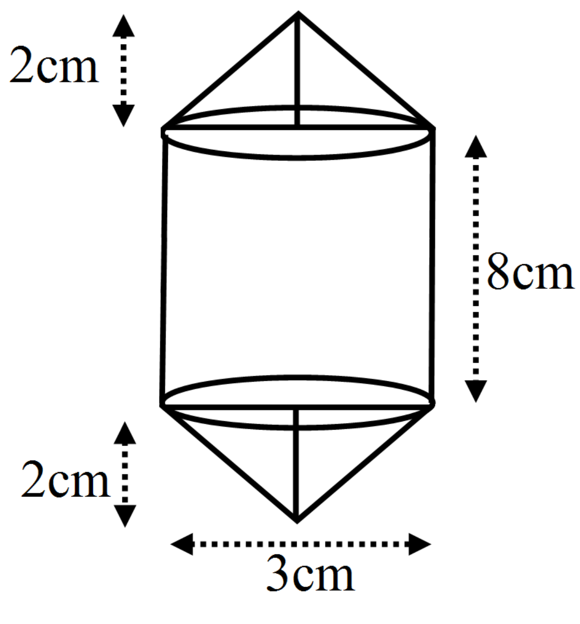
$$= \frac{1}{3}\pi[3]$$

$$= \pi \text{ cm}^3$$

3 ठोस का आयतन $\pi \text{ cm}^3$

प्रश्न 2 एक इंजीनियरिंग के विधार्थी रचेल से एक पतली एल्युमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इसा मॉडल का व्यास 3cm है और इसकी लंबाई 12cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर है।)

उत्तर-



शंकु की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5cm$

शंकु की ऊँचाई h = 2cm

बेलन की त्रिज्या r = 1.5cm

बेलन की ऊँचाई H = 12 - 2 - 2 = 8cm

मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन = 2 (शंकु का आयतन) + बेलन का आयतन

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) + \pi r^2 H$$

$$= \pi r^2\left(\frac{2}{3}h + H\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5\left(\frac{2}{3} \times 2 + 8\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times \frac{15}{10}\left(\frac{4+24}{3}\right)$$

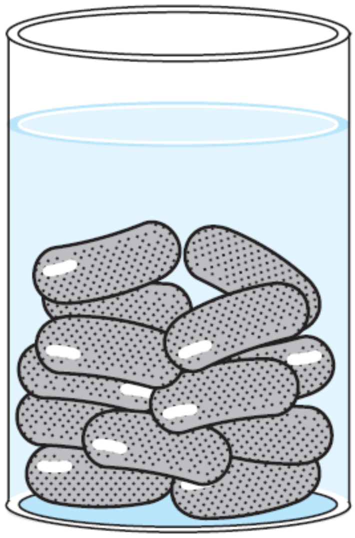
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\left(\frac{28}{2}\right)$$

$$= 22 \times 3$$

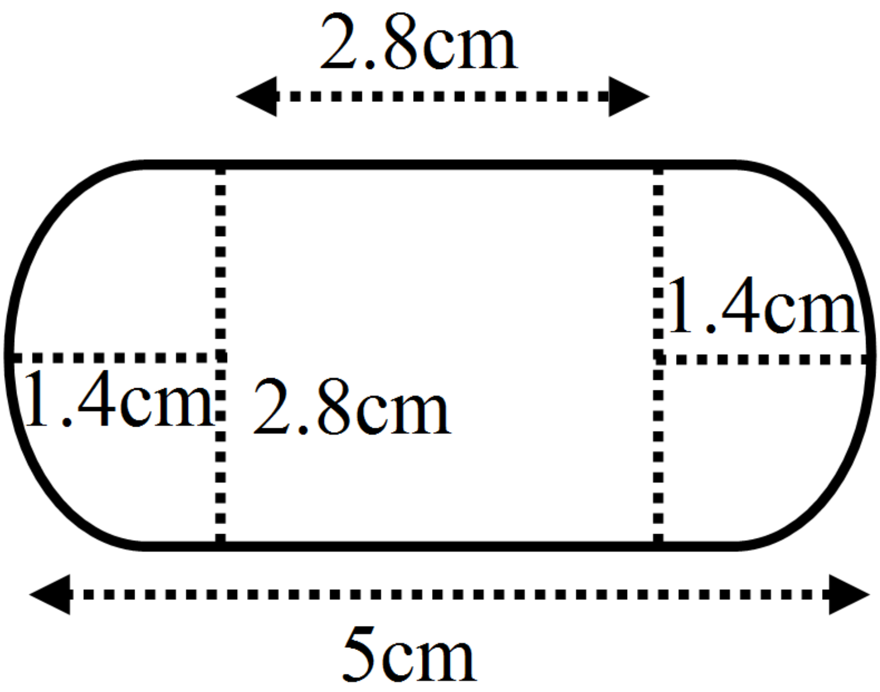
$$= 66cm^3$$

अतः मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन $66cm^3$ है।

प्रश्न 3 एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5cm और व्यास 2.8cm है (देखिए आकृति)।



उत्तर-



अर्धगोलाकार सिरे का व्यास = 2.8cm

तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या r = 1.4cm

पुरे गुलाब जामुन की लम्बाई l = 5cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई h = 5 - (1.4 + 1.4)

= 5 - 2.8cm

= 2.2cm

सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45 (अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन)

$$= 45\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2\right)$$

$$= 45\pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h + \frac{2}{3}r\right)$$

$$= 45\left[\frac{22}{7}(1.4)^2\left(\frac{2}{3}\times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3}\times 1.4\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{22}{7}\times\frac{14}{10}\times\frac{14}{10}\left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3}\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{44\times 14}{100}\left(\frac{5.6}{3} + 2.2\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{5.6+6.6}{3}\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{12.2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{15\times 616\times 122}{1000}$$

$$= \frac{1127280}{1000}$$

$$= 1127.280\text{cm}^3$$

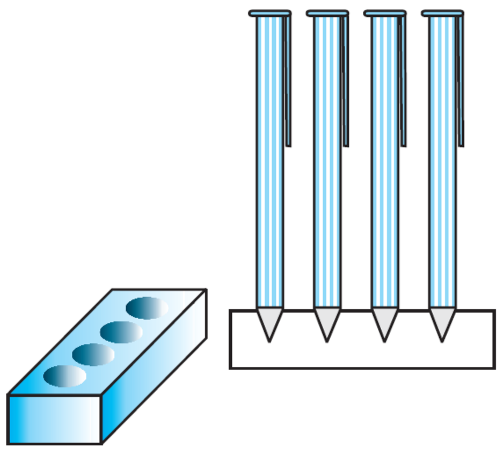
चासनी की मात्रा = 1127.280cm^3 का 30%

$$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$$

$$= 338.1840\text{cm}^2$$

अतः 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338cm^3 है।

प्रश्न 4 एक कमलदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना हा जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15cm × 10cm × 3.5cm हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5cm है और गहराई 1.4cm है। पुरे कमलदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर- धनाभ की लंबाई l = 15cm

घनाभ की चौड़ाई b = 10cm

घनाभ की ऊँचाई h = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = 0.5cm

ऊँचाई (h) = 1.4cm

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन = घनाभ का आयतन - चरों शंकाकार गढ्ढे का आयतन

$$= l \times b \times h - 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

$$= 15 \times 10 \times 3.5 - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4\right)$$

$$= 525 - 4\left(\frac{1}{3} \times 22 \times 0.25 \times 0.2\right)$$

$$= 525 - \left(\frac{1}{3} \times 4.4\right)$$

$$= 525 - \frac{4.4}{3}$$

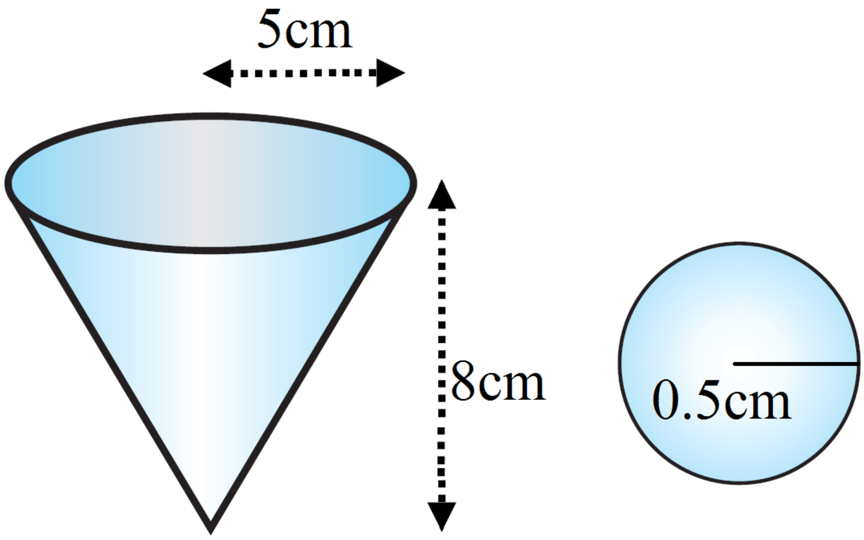
$$= 525 - 1.47$$

$$= 523.53 cm^3$$

पुरे कमलदान की लकड़ी का आयतन 523.53cm^3 है।

प्रश्न 5 एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5cm त्रिज्या है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमे प्रत्येक 0.5cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु की ऊँचाई (h) = 8cm

शंकु की त्रिज्या (R) = 5cm

गोली की त्रिज्या (r) = 0.5cm

माना बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = n

अतः n × (गोली का आयतन) $= \frac{1}{4}$ (शंकु का आयतन)

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

सरलीकरण करने पर-

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times R^2 \times h$$

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times 0.125 = \frac{1}{3} \times 25 \times 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.125}$$

$$\Rightarrow n = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{125}$$

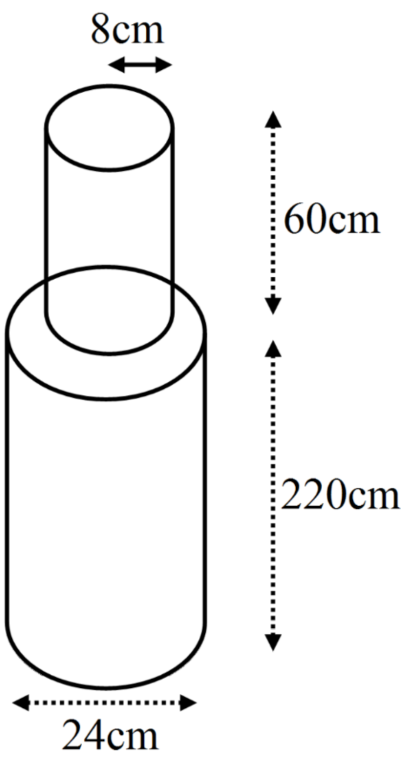
$$\Rightarrow n = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{5}$$

$$\Rightarrow n = \frac{500}{5} = 100$$

अत: गोलियों की संख्या 100 है।

प्रश्न 6 ऊँचाई 220cm और आधार व्यास 24cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60cm और त्रिज्या 8cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है $1cm^3$ लोहे का द्रव्यमान लगभग 8g होता है। (π = 3.14 लीजिए।)

उत्तर-



मोटे बेलन की ऊँचाई (H) = 220cm

व्यास (d) = 24cm

अत: त्रिज्या (R) = 12cm

पतले बेलन की ऊँचाई (h) = 60cm

त्रिज्या (r) = 8cm

$$\text{अब लौह स्तंभ का आयतन} = \pi R^2 H + \pi r^2 h$$

$$= \pi(R^2 H + r^2 h)$$

$$= 3.14(12 \times 12 \times 220 + 8 \times 8 \times 60)$$

$$= 3.14(31680 + 3840)$$

$$= 3.14(35520)$$

$$= 111532.8 cm^2$$

$$\text{लोहे का द्रव्यमान} = 111532.8 cm^3 \times 8$$

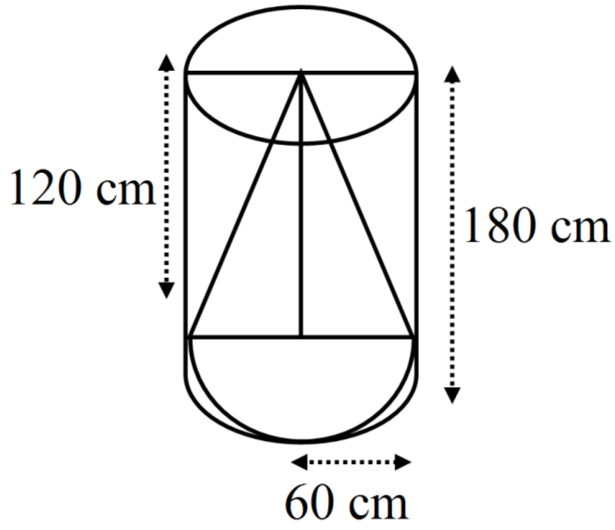
$$= 892262.4 g$$

$$\text{अब द्रव्यमान kg में} = \frac{892262.4}{1000} = 8922624 kg$$

अर्थात लौह स्तंभ का द्रव्यमान 892.26kg है।

प्रश्न 7 एक ठोस में, ऊँचाई 120cm और त्रिज्या 60cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60cm है, और ऊँचाई 180cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



ठोस के शंकु की ऊँचाई (h) = 120cm

ठोस के शंकु की त्रिज्या (r) = 60cm

ठोस के अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 60cm

बड़े बेलन की ऊँचाई (H) = 180cm

बड़े बेलन की की त्रिज्या (r) = 60cm

शेष बचे पानी का आयतन = बड़े बेलन का आयतन - ठोस का आयतन

$$= \pi r^2 H - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \pi r^2 \left[H - \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{3}r\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left[180 - \left(\frac{1}{3} \times 120 + \frac{2}{3} \times 60\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[180 - (40 + 40)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[180 - 80]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[100]$$

$$= \frac{22 \times 360000}{7} \text{cm}^3$$

$$= \frac{7920000}{7} \text{cm}^2$$

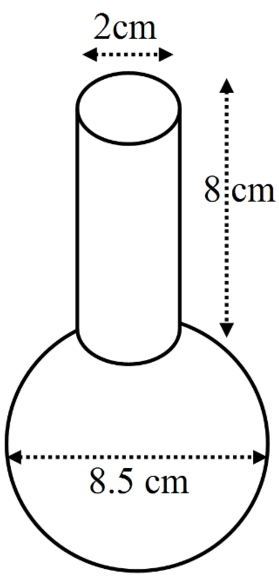
$$= 1131428.57 \text{cm}^2$$

या आयतन घन मीटर में $= \dfrac{1131428.57}{100 \times 100 \times 100} \text{m}^3$

$= 1.131 \text{m}^3$ (लगभग)

प्रश्न 8 एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8cm है और व्यास 2cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345cm^3 है। जाँच कीजिए कि बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए की उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है। $\pi = 3.14$

उत्तर-



गोलाकार भाग का व्यास = 8.5cm

गोलाकार भाग का त्रिज्या $(\mathrm{R})=\frac{8.5}{2}\mathrm{cm}$

बेलनाकार गर्दन की ऊँचाई (h) = 8cm

गर्दन का व्यास (d) = 2cm

इसलिए, त्रिज्या (r) = 1cm

इसमें भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$$=\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3+\pi\mathrm{r}^2\mathrm{h}$$

$$=3.14\left(\frac{4}{3}\times\frac{8.5}{2}\times\frac{8.5}{2}\times\frac{8.5}{2}+1\times1\times8\right)$$

$$=3.14\left(\frac{8.5\times8.5\times8.5}{3\times2}+8\right)$$

$$=3.14\left(\frac{614.125+48}{6}\right)$$

$$=3.14\left(\frac{662.125}{6}\right)$$

$$=\frac{1.57\times662.125}{3}$$

$$=\frac{1.57\times662.125}{3}$$

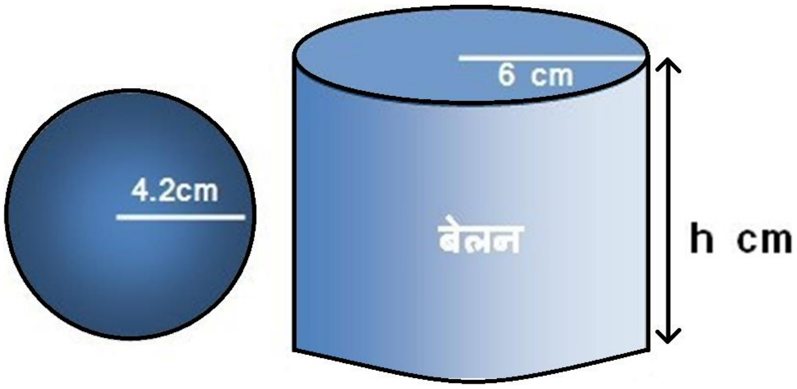
$$=346.51\mathrm{cm}^3$$

अतः बच्चे द्वारा ज्ञात माप सही नहीं है।

प्रश्नावली 13.3 (पृष्ठ संख्या 276)

प्रश्न 1 त्रिज्या 4.2cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



धातु के गोले की त्रिज्या (r) = 4.2cm

बेलन की त्रिज्या (R) = 6cm और

माना बेलन की ऊँचाई h cm है।

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow R^2 h = \frac{4}{3} r^3$$

$$\Rightarrow 6^2 h = \frac{4}{3}(4.2)^3$$

$$\Rightarrow 36h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$\Rightarrow h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 36}$$

$$\Rightarrow h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 9} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74\text{cm}$$

प्रश्न 2 क्रमशः 6cm, 8cm और 10cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया हो- r_1 = 6cm, r_2 = 8cm और r_3 = 10cm

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(\mathrm{r}_1)^3 + \frac{4}{3}\pi(\mathrm{r}_2)^3 + \frac{4}{3}\pi(\mathrm{r}_3)^3$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3 = \frac{4}{3}\pi\left[(\mathrm{r}_1)^3 + (\mathrm{r}_2)^3 + (\mathrm{r}_3)^3\right]$$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते है-

$$\Rightarrow (\mathrm{R})^3 = \left[(\mathrm{r}_1)^3 + (\mathrm{r})^3 + (\mathrm{r})^3\right]$$

$$\Rightarrow (\mathrm{R})^3 = \left[(6)^3 + (8)^3 + (9)^3\right]$$

$$\Rightarrow (\mathrm{R})^3 = \left[216 + 512 + 1000\right]$$

$$\Rightarrow (\mathrm{R})^3 = 1728$$

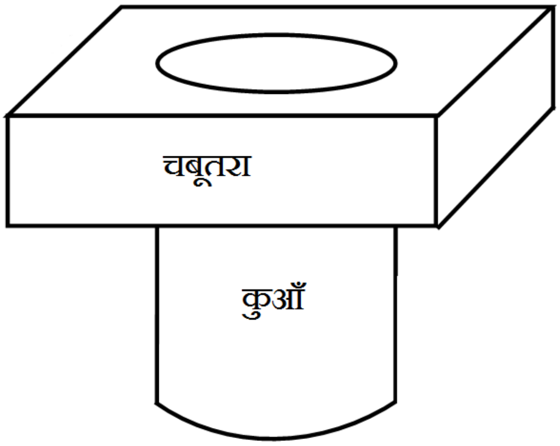
$$\Rightarrow \mathrm{R} = \sqrt[2]{1728}$$

$$\Rightarrow \mathrm{R} = 12$$

अतः नए गोले की त्रिज्या 12cm है।

प्रश्न 3 व्यास 7m वाला 20m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22m × 14m वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



कुएँ का व्यास = 7m

अत: कुएँ की त्रिज्या (r) = 3.5cm

कुएँ की गहराई (h) = 20m चबूतरे की लम्बाई (l) = 22m और चौड़ाई (b) = 14m

माना चबूतरे की ऊँचाई = h m

चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन $l \times b \times h = \pi r^2 h$

$$22\text{cm} \times 14\text{cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20\text{m}$$

$$\Rightarrow 22\text{cm} \times 14\text{cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20$$

$$\Rightarrow h = \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 20}{7 \times 14 \times 22}$$

$$\Rightarrow h = \frac{35 \times 35 \times 20}{7 \times 14 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow h = \frac{5 \times 35 \times 2}{14 \times 10}$$

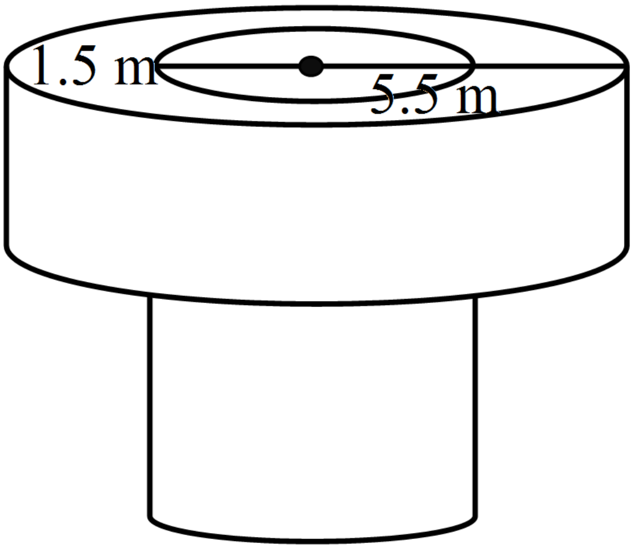
$$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5\text{m}$$

अतः चबूतरे की ऊँचाई = 2.5m

प्रश्न 4 व्यास 3m वाला 14m गहरा की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुँए के चारों ओर 4m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



कुएँ का व्यास = 3m

कुएँ की त्रिज्या $(\mathrm{r}) = \frac{3}{2}\mathrm{m} = 1.5\mathrm{m}$

कुएँ की गहराई (H) = 14 m

कुएँ के चारों वृताकार वलय की चौड़ाई = 4m

अत: वलय की बाह्य त्रिज्या (R) = 4m + 1.5 = 5.5m

माना वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = h m

वलयाकार चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$$\Rightarrow \pi\mathrm{R}^2\mathrm{h} - \pi\mathrm{r}^2\mathrm{h} = \pi\mathrm{r}^2\mathrm{H}$$

$$\Rightarrow \pi\mathrm{h}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2) = \pi\mathrm{r}^2\mathrm{H}$$

$$\Rightarrow \mathrm{h}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2) = \mathrm{r}^2\mathrm{H}$$

$$\Rightarrow \mathrm{h}(5.5 + 1.5)(5.5 - 1.5) = 1.5 \times 1.5 \times 14$$

$$\left[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$$

$$\Rightarrow h(7 \times 4) = 1.5 \times 1.5 \times 14$$

$$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{7 \times 4}$$

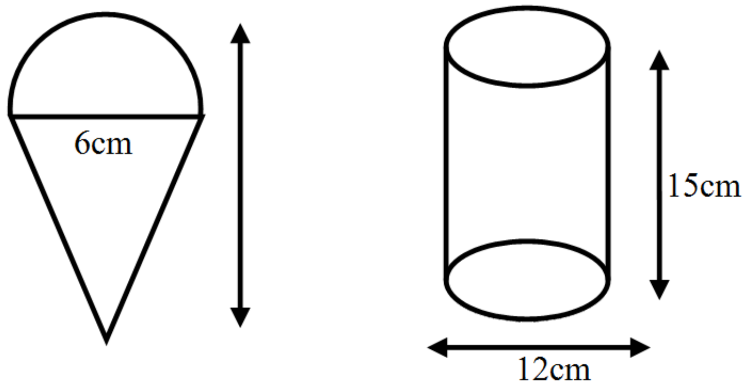
$$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2}$$

$$\Rightarrow h = 1.125m$$

अतः वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = 1.125m

प्रश्न 5 व्यास 12cm और ऊँचाई 15cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12cm और व्यास 6cm वाले शकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा। उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।

उत्तर-



बेलनाकार बर्तन का व्यास = 12cm

तो बर्तन की त्रिज्या R = 6cm

बर्तन की ऊँचाई H = 15cm

आइसक्रीम की त्रिज्या $r = \frac{6}{2} = 3cm$

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 12cm

भरे जा सकने वाले आइसक्रीमो की संख्या = $\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{एक आइसक्रीम का आयतन}}$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\text{अर्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 (2r+h)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi 6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\pi 3^2 (2\times 3+12)}$$

$$\Rightarrow \frac{6^2 \times 15}{\frac{1}{3} 3^2 (18)}$$

$$\Rightarrow \frac{36\times 15}{3\times 18}$$

$$\Rightarrow \frac{2\times 15}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{3} = 10$$

अतः भरे जा सकने वाले आइसक्रीम की संख्या 10 है।

प्रश्न 6 विमाओं 5.5cm × 10cm × 3.5cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75cm व्यास और 2mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

उत्तर-

सिक्कों का व्यास = 1.75cm

त्रिज्या $r = \frac{1.75}{2}\text{cm}$

सिक्के की ऊँचाई h = 2mm $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\text{cm}$

माना चाँदी के सिक्कों की संख्या n है।

अतः n चाँदी के सिक्कों का आयतन - घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow n(\pi r^2 h) = l \times b \times h$$

$$\Rightarrow n = \frac{l \times b \times h}{\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5cm \times 10cm \times 3.5cm}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5}{22 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 100 \times 100}{22 \times 175 \times 175 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 2 \times 5 \times 100}{11 \times 25 \times 175}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 2 \times 100}{11 \times 25}$$

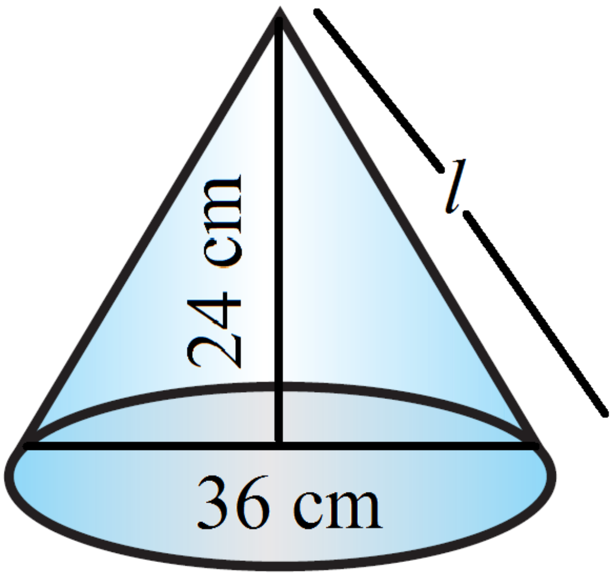
$$\Rightarrow n = \frac{5 \times 10 \times 2 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10 \times 2 \times 100}{5} = 2 \times 2 \times 100 = 400$$

अतः सिक्कों की संख्या 400 है।

प्रश्न 7 32cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेते की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है। यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या R = 18cm

और ऊँचाई H = 32cm

शंक्काकार ढेरी की ऊँचाई = 24cm

बेलनाकार बाल्टी का आयतन $= \pi R^2 H$

शंक्काकार ढेरी का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

शंक्काकार ढेरी का आयतन = बेलनाकार बाल्टी का आयतन

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi r^2 h = \pi R^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} r^2 \times 24 = \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 24 = 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow r^2 \times 8 = 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{18\times18\times32}{8}$$

$$\Rightarrow r^2 = 18 \times 18 \times 4$$

$$\Rightarrow r^2 = \sqrt{18 \times 18 \times 4}$$

$$\Rightarrow r = 36$$

$$l = \sqrt{24^2 + 36^2}$$

$$l = \sqrt{(12 \times 2)^2 + (12 \times 3)^2}$$

$$l = \sqrt{12^2 \times (2^2 + 3^2)} = 12\sqrt{(2^2 + 3^2)}$$

$$l = 12\sqrt{4 + 9} = 12\sqrt{13}\,\text{cm}$$

अत: ढेरी की त्रिज्या = 36cm और तिर्यक ऊँचाई $= 12\sqrt{13}\,\text{cm}$ है।

प्रश्न 8 6m चौड़ी और 1.5m गहरी एक नहर में पानी 10 km/ h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है।

उत्तर-

1 घंटे में नहर की लम्बाई l = 10km = 10000m

नहर की गहराई b = 6m

नहर की गहराई h = 1.5m

1 घंटे में नहर में पानी का आयतन = l × b × h

= 10000 × 6 × 1.5m^3

= 90000m^3

अतः 30 मिनट में पानी का आयतन $= \frac{90000}{2} m^3$

$= 450000 m^3$

सिंचाई के लिए पानी की ऊँचाई $= 8cm = \frac{8}{100} m$

अब, क्षेत्रफल × ऊँचाई = आयतन

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $\times \frac{8}{100} = 45000 m^3$

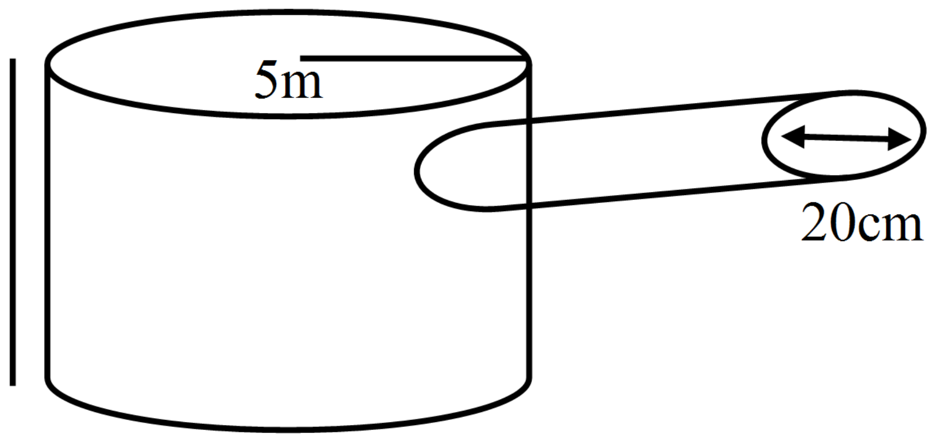
$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 45000 m^3 \times \frac{100}{8}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 562500 m^2$

अतः सिंचाई के लिए $562500 m^3$ क्षेत्रफल की जरूरत है।

प्रश्न 9 एक किसान अपने खेत में बनी 10m व्यास वाली और 2m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3km/ h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

उत्तर-



टंकी का व्यास = 10m

टंकी की त्रिज्या = 5m

टंकी की गहराई h = 2m

पाइप का व्यास = 20cm पाइप की त्रिज्या = 10cm = 0.1m

1 घंटे में पाइप की लम्बाई = 3km = 3000m

अब पाइप में 1 घंटे में पानी का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times 0.1 \times 0.1 \times 3000$$

$$= \pi \times 30 m^3$$

टंकी में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times 5 \times 5 \times 2$$

टंकी भरने में लगा समय $= \dfrac{\text{टंकी का आयतन}}{\text{1 घंटे में पाइप में पानी}}$

$$= \frac{\pi \times 5 \times 5 \times 2}{\pi \times 30}$$

$$= \frac{5 \times 5}{15}$$

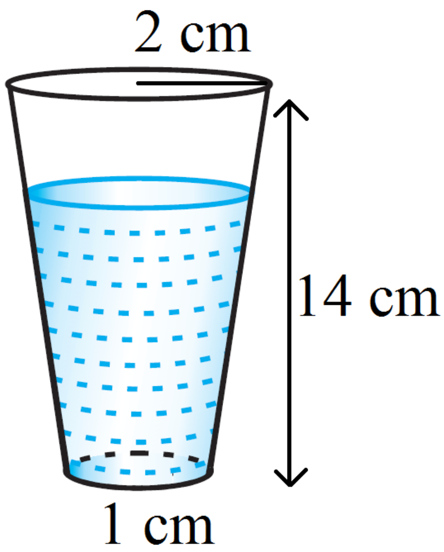
$= \frac{5}{3}$ घंटा

मिनट में लगा समय $= \frac{5}{3} \times 30 = 5 \times 20 = 100m$

प्रश्नावली 13.4 (पृष्ठ संख्या 282)

प्रश्न 1 पानी पीने वाला एक गिलास 14cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4cm और 2cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14cm

उपरी सिरे का व्यास = 4cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2cm

निचली सिरे का व्यास = 2cm

निचली सिरे की त्रिज्या । = 1cm

$$\text{गिलास की धारिता} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14(2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

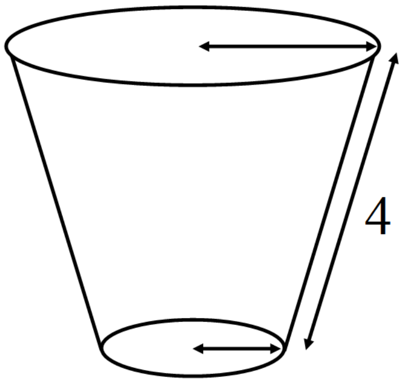
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2(4 + 1 + 2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$$

$$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3}\,\text{cm}^3$$

प्रश्न 2 एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18cm और 6cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) = 4cm

ऊपरी सिरे का परिमाप = 18cm

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$

निचले सिरे परिमाप = 6cm

$$2\pi r = 6$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(R + r)$

$$= \pi \times 4\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)$$

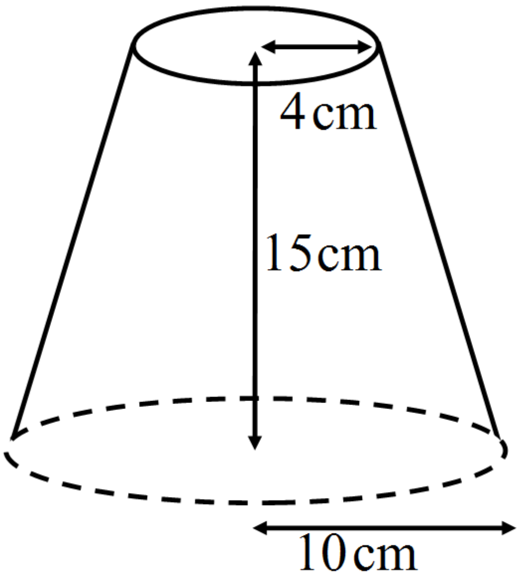
$$= \pi \times 4\left(\frac{12}{\pi}\right)$$

$$= 48cm^2$$

अतः छिन्नक का पृष्ठीय क्षेत्रफल $48cm^2$ है।

प्रश्न 3 एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकर की है (देखिये आकृति)। यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4cm है टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15cm है तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = 15cm



खुले सिरे की त्रिज्या (R) = 10cm

ऊपरी सिरे की त्रिज्या (r) = 4cm

बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 15(10 + 4) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4$$

$$= \frac{22}{7} \times 15(14) + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7} \times 210 + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7}(210 + 16)$$

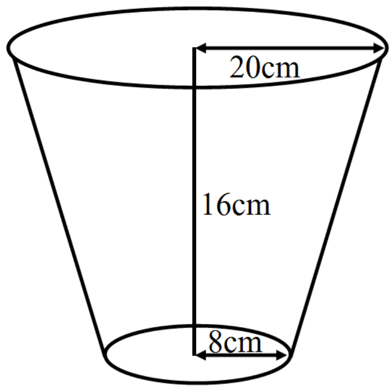
$$= \frac{22}{7}(226)$$

$$= \frac{4972}{7}\,\text{cm}^2$$

$$= 710\tfrac{2}{7}\,\text{cm}^2$$

प्रश्न 4 धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के छिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 20cm हैं। 20 रू प्रति लीटर की दर से, इस बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य 8 रू प्रति 100cm^2 की दर से ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बर्तन की ऊँचाई (h) = 16cm

बर्तन की ऊपरी सिरे की त्रिज्या (R) = 20cm

बर्तन के निचले सिरे की त्रिज्या (r) = 8cm

बर्तन का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(20^2 + 8^2 + 20 \times 8)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(400 + 64 + 160)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 \times 624$

$= 3.14 \times 3328$

$= 10449.92 cm^3$

लीटर में धारिता $= \frac{10449.92}{1000}$ लीटर

लीटर में धारिता = 10.45 लीटर (लगभग)

दूध का मूल्य = 20 × 10.45 = रू 209.00

तिर्यक ऊँचाई (l) $= \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$$= \sqrt{16^2 + (20 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{256 + 12^2}$$

$$= \sqrt{256 + 144}$$

$$= \sqrt{400} = 20\text{cm}$$

प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi r^2$

$$= 3.14 \times 20(20 + 8) + 3.14 \times 8 \times 8$$

$$= 3.14 \times 20(28) + 3.14 \times 64$$

$$= 3.14(560 + 64)$$

$$= 3.14(624)$$

$$= 1959.36\text{cm}^2$$

8 रु प्रति 100cm^2 की दर से चादर का मूल्य $= \frac{8}{100} \times 1959.36$

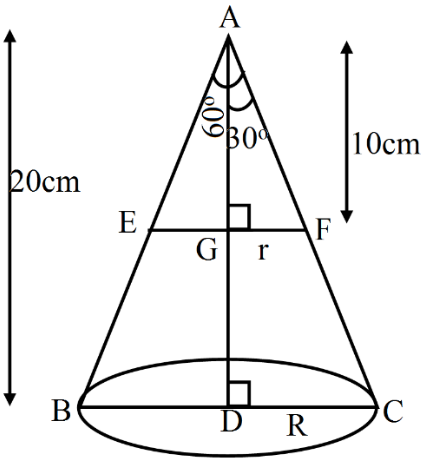
$$= \frac{15674.88}{100} = 156.75$$

अतः धातु के चादर का मूल्य रु 156.75 है।

प्रश्न 5 20cm ऊँचाई और शीर्ष कोण (vertical angle) 60º एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचोंबीच से होकर जाते हुए एक ताल से दो भागों में काटा गया है, जबकि ताल शंकु के आधार के

समांतर है। यदि इस प्राप्त शंकु के छिन्नक को व्यास $\frac{1}{16}$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया है-

$$AD = 20cm$$

तो AG = 10cm (बीचो बीच से काटा गया है)

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$AD\ \angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

इसलिए, $\angle CAD = 30^\circ$

समकोण $\triangle AGF$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{AG}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{10}$$

$$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \ldots (i)$$

इसी प्रकार, समकोण $\triangle ADC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{R}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{20}$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{\sqrt{3}} \ldots (ii)$$

माना तार की लम्बाई H है।

त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}\,\mathrm{cm}$

तार का आयतन = प्राप्त छिन्नक का आयतन

$$\Rightarrow \pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10\left[\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10\left[\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{100}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{700}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{7000}{9}$$

$$\Rightarrow H = \frac{7000}{9} \times \frac{32}{1} \times \frac{32}{1}\,\mathrm{cm}$$

$$\Rightarrow H = \frac{7168000}{9} \times \frac{1}{100}\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow H = \frac{71680}{9}\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow H = 7964.44\mathrm{m}$$

अतः तार की लम्बाई 7964.44m है।

प्रश्नावली 13.5 (पृष्ठ संख्या 283)

प्रश्न 1 व्यास 3mm वाले ताँबे के तार को 12cm लंबे और 10cm व्यास वाले एक बेलन पर इस प्रकार लपेटा जाता है वह बेलन के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है। तार की लंबाई और द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यह मानते हुए कि ताँबे का घनत्व 8.88g प्रति cm^3 है।

उत्तर-

सिलेंडर की लंबाई = 12cm = 120mm

$\because$ 3mm = 1 को कवर करने के लिए राउंड की संख्या

$\therefore$ 120mm को कवर करने के लिए राउंड की संख्या

$$= \frac{120}{3} = 40$$

Rcm बेलन की त्रिज्या हो, तब

$$= \mathrm{r} = \frac{10}{2} = 5\mathrm{cm}$$

$\therefore$ एक चक्कर पूरा करने में तार की लंबाई,

$$= 2\pi$$

$$= 2\pi(5) = 10\pi\mathrm{cm}$$

$\therefore$ पूरी सतह को पूरा करने में तार की लंबाई (40 राउंड)

$$= 10\pi \times 40 = 400\pi\mathrm{cm}$$

तांबे के तार का त्रिज्या $= \frac{3}{2}\mathrm{mm} = \frac{3}{20}\mathrm{cm}$

$\therefore$ तार की मात्रा $= \pi\left(\frac{3}{20}\right)^2(400\pi)$

$$9\pi^2\mathrm{cm}^3$$

$$= 79.92\pi^2\mathrm{g}$$

प्रश्न 2 एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 3cm और 4cm हैं (कर्ण के अतिरिक्त), को उसके कर्ण के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त द्वी-शंकु (double cone) के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π भी उपयुक्त लगे, प्रयोग कीजिए।)

उत्तर- सही त्रिकोण CAB में:

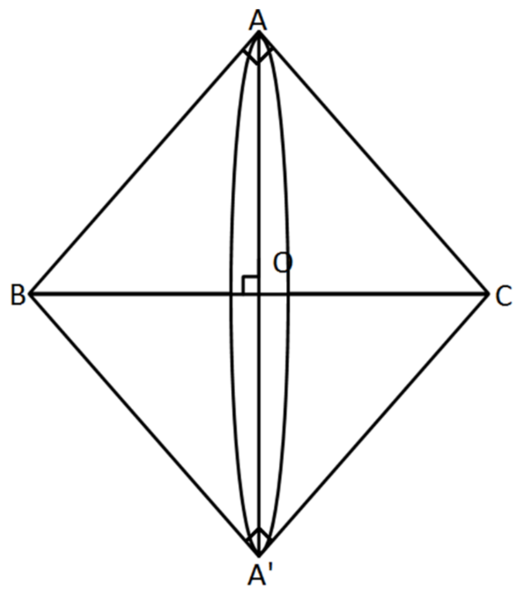
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

[पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करना]

$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow BC^2 = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow BC = 5cm$



अब, में $\triangle AOB$ और $\triangle CAB$

$\angle AOB = \angle CAB (90^\circ)$

$\angle B = \angle B$ [Common]

इसलिए, AA इसी तरह की स्थिति का उपयोग करके,

$\triangle AOB \sim \triangle CAB$

$\Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow \frac{OA}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow OA = \frac{12}{5} cm$

इसी प्रकार, $\frac{OB}{AB} = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow \frac{OB}{3} = \frac{3}{5} \Rightarrow OB = \frac{9}{5} cm$

$\therefore OC = BC - OB$

$= 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5} cm$

अभी डबल शंकु की मात्रा तो बनती है।

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{16}{5} + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{9}{5}$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \left[\frac{16}{5} + \frac{9}{5}\right]$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \left[\frac{25}{5}\right]$

$= \left(\frac{1}{3}\pi \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{25}{5}\right) cm^3$

$= \left(\frac{3600}{375}\pi\right) cm^3$

$= 9.6\pi cm^3$

$(9.6 \times 3.14) cm^3$

$$= 30.14\text{cm}^3$$

और डबल कोन का सरफेस एरिया-

$$= \pi \times \frac{12}{5} \times 3 + \pi \times \times \frac{12}{5} \times 4$$

$$= \pi \times \frac{12}{5}(3 + 4)$$

$$= \pi \times \frac{12}{5} \times 7 = \frac{84}{5}\pi$$

$$= \frac{84}{5} \times 3.14 = 52.75\text{cm}^2.$$

प्रश्न 3 एक टंकी, जिसके आंतरिक मापन 150cm × 120cm × 110cm हैं, में 129600cm^3 पानी में कुछ छिद्र वाली ईंटे तब तक डाली जाती हैं, जब तक कि ताकि पूरी ऊपर तक भर न जाए। प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{1}{17}$ पानी सोख लेती है। यदि प्रत्येक ईंट की माप 22.5cm × 7.5cm × 6.5cm हैं, तो टंकी में कुल कितनी ईंटे डाली जा सकती हैं, ताकि उसमें से पानी बाहर न बहे?

उत्तर- गड्ढे में पानी की मात्रा = 129600cm^3

आइए, b और h, Cistern की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं। फिर

मैं = 150cm = 120cm और एच = 110cm

अब, Cistern का आयतन = l × b × h

= 150 × 120 × 110 = 1980000cm^3

∴ भरा जाने वाला गड्ढा का आयतन

= $(1980000 - 129600)\text{cm}^3$

= 1850400cm^3

एक ईंट की मात्रा = $(22.5 \times 7.5 \times 6.5)cm^3$

$= 1096.875cm^3$

बता दें कि ईंटों की कुल संख्या x है।

फिर, एक्स ईंटों द्वारा पानी अनुपस्थित,

$$= \left(\frac{x}{17} \times 1096.875\right)cm^3$$

∴ गड्ढे में बचे पानी का आयतन,

$$= \left(129600 - \frac{x}{17} \times 1096.875\right)cm^3$$

चूंकि, पुल के ऊपर तक का हिस्सा भर जाता है। इसलिए,

गड्ढे का आयतन = ईंटों के गड्ढे की मात्रा में छोड़े गए पानी का आयतन

$$\Rightarrow 1980000 = \left(129600 - \frac{x}{17} \times 1096.875\right) + x \times 1096.875$$

$$\Rightarrow x = 1792.410$$

इसलिए, ईंटों की कुल संख्या = 1792 (लगभग)।

प्रश्न 4 किसी महीने के 15 दिनों में, एक नदी की घाटी में 10cm वर्षा हुई। यदि इस घाटी का क्षेत्रफल $97280km^2$ है, तो दर्शाइए कि कुल वर्षा लगभग तीन नदियों के सामान्य पानी के योग के समतुल्य थी, जबकि प्रत्येक नदी 1072km लंबी, 75m चौड़ी और 3m गहरी है।

उत्तर-

वर्षा का आयतन-

$$= 7280 \times \frac{10}{100 \times 1000}$$

$$= 0.7280 \text{km}$$

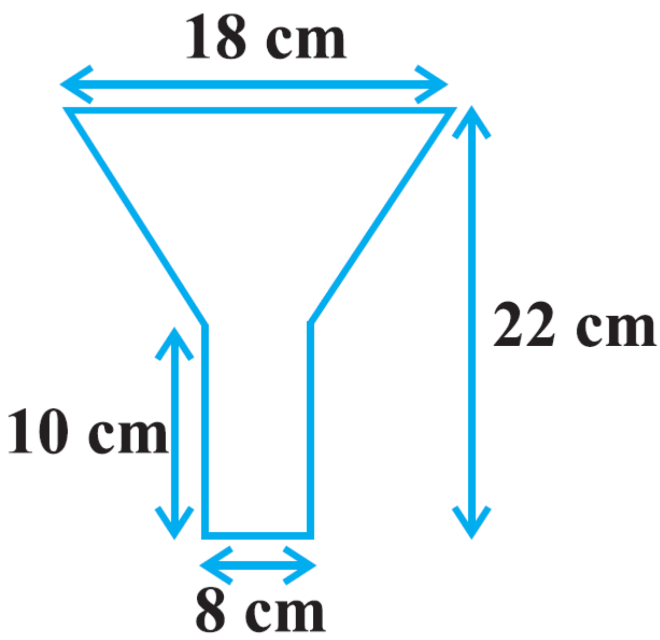
तीन नदियों का आयतन-

$$= \left(3 \times 1072 \times \frac{75}{1000} \times \frac{3}{100}\right) \text{km}$$

$$0.7236 \text{km}$$

इसलिए, दोनों लगभग बराबर हैं।

प्रश्न 5 टीन की बनी हुई एक तेल की कुप्पी 10cm लंबे एक बेलन में एक शंकु के छिन्नक को जोड़ने से बनी है। यदि इसकी कुल ऊँचाई 22cm है, बेलनाकार भाग का व्यास 8cm है और कुप्पी के ऊपरी सिरे का व्यास 18cm है, तो इसके बनाने में लगी टीन की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर-

$$R = \frac{18}{2} = 9cm; r = \frac{8}{2} = 4cm$$

आइए और एच क्रमशः तिरछी ऊंचाई और कुंठा की ऊंचाई, फिर

h = कुल ऊँचाई - बेलनाकार भाग की ऊँचाई

= 22cm - 10cm = 12cm

और $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$$= \sqrt{(12)^2 + (9 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169} = 13cm$$

अभी फ्रुम का घुमावदार सतह क्षेत्र-

$$= \pi l(R + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 13(9 + 4)$$

$$= \frac{22}{7} \times 13 \times 13$$

$$= 531.14cm^2$$

आज्ञा देना और h_1 क्रमशः त्रिज्या और त्रिज्या की ऊंचाई है।

फिर, और h_1 = 4cm और एच = 10cm

अभी, सिलेंडर का घुमावदार सतह क्षेत्र-

$$= 2\pi r_1 h_1$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 10\right) cm^2$$

$$= 251.43cm^2$$

अतः टिन का क्षेत्र आवश्यक है,

= बेलन के घुमावदार सतह क्षेत्र + सिलेंडर का घुमावदार सतह क्षेत्र-

= 531.14 + 251.43

= $782.57cm^2$

प्रश्न 6 शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के उन सूत्रों को सिद्ध कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिए गए हैं।

उत्तर-

माना कि ऊँचाई, I तिर्यक ऊँचाई एवं r_1 और r_2 फ्रूम के परिपत्र आधार की त्रिज्या है, $r_1 > r_2$

माना की कोण VAB की ऊँचाई h_1 और तिर्यक ऊँचाई इस प्रकार है कि $VO = h_1$ और $VA = VB = l_1$

$\therefore VA' = VA - AA = l_1 - I$

और $VO' = VO - OO' = h_1 - h$

तथा $\triangle VOA \approx \triangle VO'A'$

$$\therefore \frac{VO}{VO'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{VA}{VA'}$$

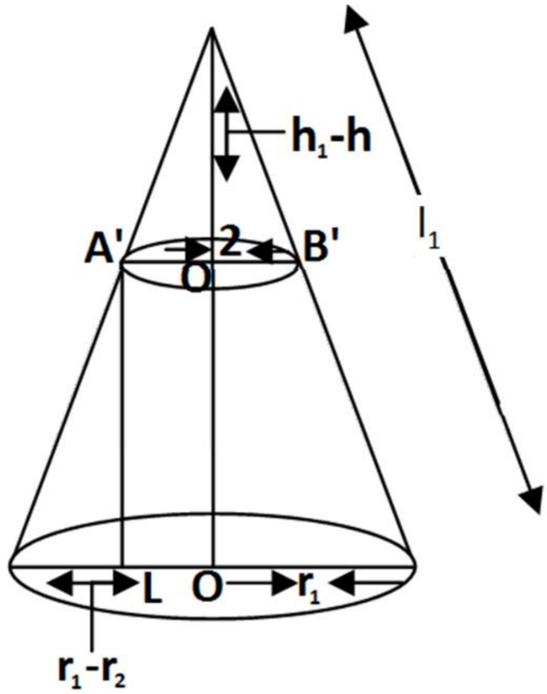
$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_1 - h} = \frac{r}{R} = \frac{l_1}{l_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_1 - h} = \frac{F_2}{F_1} = 1 - \frac{l_1}{l_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1} \text{ and } \frac{l}{l_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \text{ and } \frac{l}{l_1} = 1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} \text{ and } l_1 = \frac{lr_1}{r_1 - r_2} \ldots (A)$$



अभी,

शंकु VA'B 'की ऊँचाई-

$$= h_1 - h = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} - h = \frac{hr_2}{r_1 - r_2} \ldots (B)$$

$$= l_1 - l = \frac{lr_1}{r_1 - r_2} - l = \frac{lr_2}{r_1 - r_2} \ldots (c)$$

आइए, शंकु के फ्रुम के घुमावदार सतह क्षेत्र को निरूपित करते हैं। फिर,

शंकु VAB का एस = पार्श्व (घुमावदार) सतह क्षेत्र - शंकु VA'B 'का घुमावदार सतह क्षेत्र,

$$\Rightarrow s = \pi r_1 l_1 - \pi r_2 (l_1 - l)$$

$$\Rightarrow s = \pi r_1 . \frac{lr_1}{r_1 - r_2} - \pi r_1 . \frac{lr_2}{r_1 - r_2}$$

[A और C का उपयोग करना]

$$S = \pi\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2}\right)l$$

$$= \pi(r_1 - r_2)l$$

छिन्नक का वक्र सतही क्षेत्रफल-

फ्रिज़्म का कुल सतह क्षेत्र = पार्श्व (घुमावदार) सतह क्षेत्र + गोलाकार आधारों का भूतल क्षेत्र,

$$= \pi(r_1 - r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \pi\left[(r_1 - r_2)l + r_1^2 + r_2^2\right]$$

प्रश्न 7 शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, आयतन का वह सूत्र कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिया गया है।

उत्तर-

बता दें कि V शंकु के फ्रुम का आयतन है। फिर,

V = शंकु की मात्रा VAB - शंकु VA 'B' का आयतन,

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (h_1 - h)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[r_1^2 h_1 - r_2^2 (h_1 - h)\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{h r_1^3}{r_1 - r_2}\right) - \left(\frac{h r_2^3}{r_1 - r_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{h}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2)\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

इस प्रकार, शंकु के फ्रुम की मात्रा द्वारा दी गई है।