

गणित

अध्याय-9: त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग



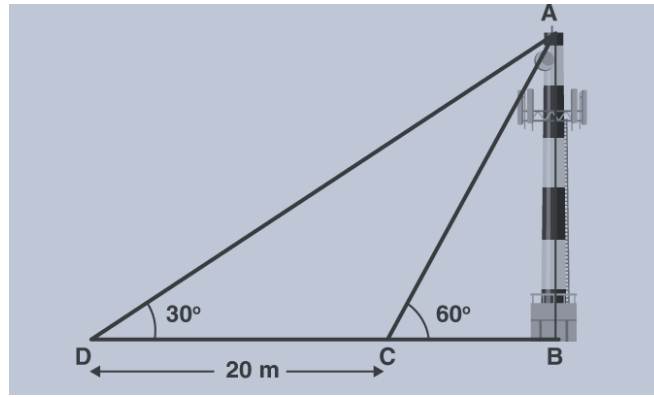
दैनिक जीवन में त्रिकोणमिति के उपयोग

त्रिकोणमिति का वास्तविक जीवन की स्थितियों से कई समस्याओं को हल करने में व्यापक अनुप्रयोग है। लंबाई या ऊंचाई की अप्रत्यक्ष माप के लिए सबसे अच्छे तरीकों में से एक त्रिकोणमितीय ही हैं। त्रिकोणमिति का उपयोग भूगोल, खगोल विज्ञान आदि में बड़े पैमाने पर किया जाता है।

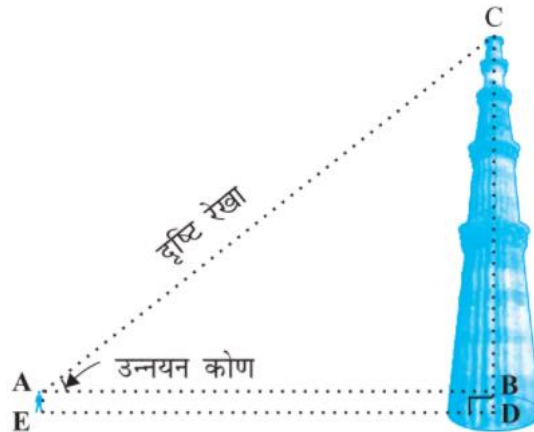
त्रिकोणमिति के ज्ञान का उपयोग मानचित्रों के निर्माण के लिए भी किया जाता है, जो अक्षांशों और अक्षांशों के संबंध में विभिन्न द्वीपों की स्थिति निर्धारित करते हैं। सीबीएसई सिलैबस में त्रिकोणमिति के केवल आधारभूत उदाहरण ही हैं। यदि आपको तिवारी अकादमी की वेबसाइट की सामग्री तक पहुंचने में कोई कठिनाई हो रही है, तो मदद के लिए हमसे संपर्क करें। हम जल्द से जल्द आपकी मदद करेंगे।

त्रिकोणमिति के प्रयोग (Use of Trigonometry)

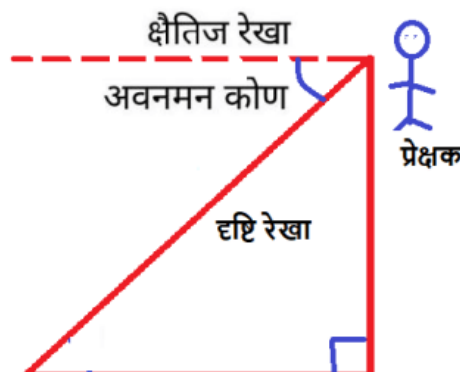
- किसी बहुत ऊँची इमारत (building) या मीनार (tower) की ऊँचाई ज्ञात करने में
- किसी नदी/समुद्र की चौड़ाई ज्ञात करने में
- पृथ्वी से ग्रहों (planets) और तारों (stars) की दूरी ज्ञात करने में
- मानचित्र (map) बनाने और अक्षांश एवं देशांतर (latitude and longitude) के सापेक्ष किसी द्वीप (island) की स्थिति ज्ञात करने में
- किसी उड़ती चीज की किसी बिंदु से दूरी या ऊँचाई ज्ञात करने में
- इंजीनियरिंग और भौतिक विज्ञान (physics) में



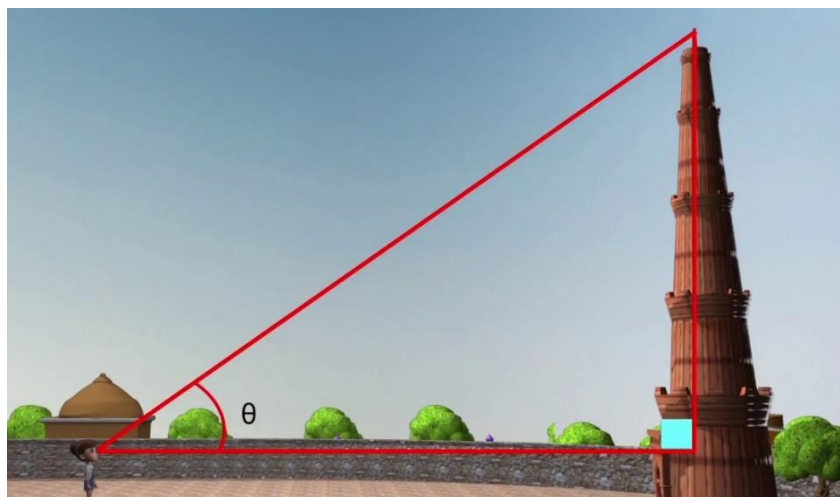
- **दृष्टि रेखा (sight line)** - प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा।



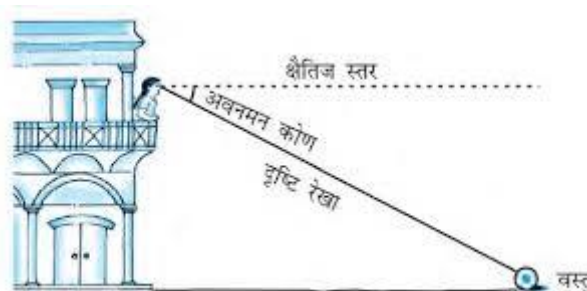
- **क्षैतिज रेखा (horizontal line)** - प्रेक्षक के पाद-बिंदु से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के पाद-बिंदु को मिलाने वाली रेखा जबकि वस्तु का पाद-बिंदु (footer point) उसी तल पर हो जिस तल पर स्वयं प्रेक्षक खड़ा है।



- **उन्नयन कोण (elevation angle)** - दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण जबकि यह क्षैतिज स्तर से ऊपर हो।



- **अवनमन कोण (depression angle)** - दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण जबकि यह क्षैतिज स्तर से नीचे हो।



- जैसे-जैसे प्रेक्षक/वस्तु अन्य प्रेक्षक/वस्तु की ओर चलते जाते हैं तो उन्नयन कोण/अवनमन कोण का मान बढ़ता जाता है। इसका विलोमशः भी सत्य है।
 - ◆ प्रश्नों हल करते समय ध्यान रखें कि पहले प्रश्न को अच्छी तरह समझ लें अन्यथा आप हमेशा अनुचित उत्तर पाएँगे।
 - ◆ यदि प्रश्न/हल में दो समकोण बनते हैं तो ध्यान रखें कि हमें सबसे पहले ये जानना होता है कि उनमें क्या चीज उभयनिष्ठ (Common) है। यदि उस उभयनिष्ठ भुजा का मान ज्ञात नहीं है तो सबसे पहले उसे ही ज्ञात करना होता है।
 - ◆ उचित त्रिकोणमितीय अनुपात के प्रयोग द्वारा ही प्रश्न को हल करें। जहाँ आप $\cot A$ का प्रयोग करते हैं वहाँ $\tan A$ से भी उत्तर (answer) सही मिलता है।
- इसी प्रकार का सम्बन्ध अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों में भी होता है।

- ◆ अज्ञात भुजा को आप कोई भी चर (variable) मान सकते हैं परंतु यदि किसी भुजा को दो भागों में बाँटा गया है और भुजा की कुल लम्बाई ज्ञात है, तो आप एक भाग को (x) और दूसरे भाग को $(\text{कुल लम्बाई} - x)$ मानते हैं।
- ◆ अवनमन कोण ज्ञात होने पर हम पहले समांतर रेखा (parallel line) और एकांतर कोण की मदद से उन्नयन कोण ज्ञात करते हैं, फिर प्रश्न को हल करते हैं।
- ◆ समकोण त्रिभुज की वह भुजा जिसमें त्रिभुज से बाहर अतिरिक्त रेखा हो, पहले उसे घटाकर (subtract) प्रश्न को हल करें।

Example:

सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंध हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।

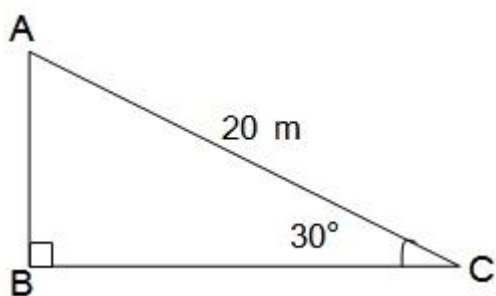
Solution:

माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30^\circ$

समकोण त्रिभुज ABC में;



माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$$\theta = 30^\circ$$

समकोण त्रिभुज ABC में;

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

$$2h = 20 \quad [\text{bi-cross Method के प्रयोग से}]$$

$$h = \frac{20}{2} = 10 \text{ m}$$

अतः खंभे की ऊँचाई = 10 मीटर

आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

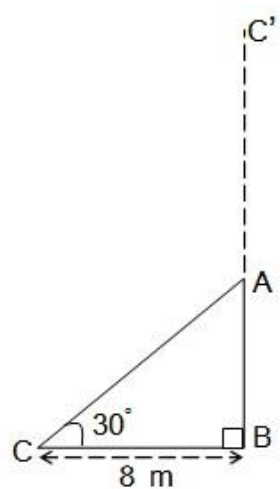
Solution:

माना पेड़ की ऊँचाई BC' है और पेड़ बिंदु A से टूटकर

जमीन पर बिंदु C पर झुकी है।

$$\theta = 30^\circ, BC = 8 \text{ m}$$

समकोण त्रिभुज ABC में, AB भुजा के लिए,



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$$

$$AB \sqrt{3} = 8$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

इसीप्रकार AC भुजा के लिए ;

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$$

$$\sqrt{3} AC = 8 \times 2 = 16$$

$$AC = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\text{पेड़ की ऊँचाई} = AB + AC$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

हर का परिमेड़करण करने पर

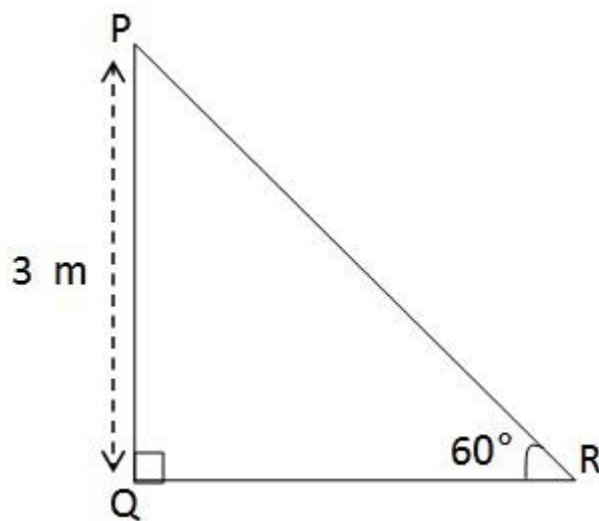
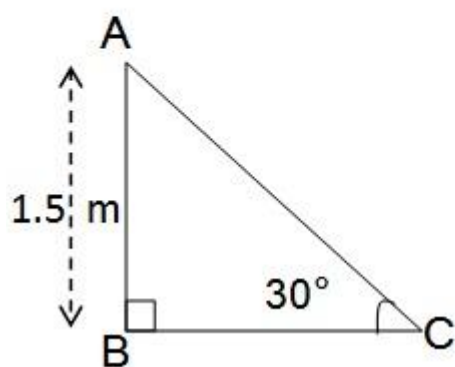
$$\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{अतः पेड़ की ऊँचाई} = 8\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों

के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?

Solution:



Case-I

समकोण त्रिभुज ABC में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई AC है

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC}$$

$$AC = 2 \times 1.5 = 3 \text{ m}$$

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = 3 मीटर

अब, Case-II

समकोण त्रिभुज PQR में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई PR है

$$\sin \theta = \frac{PQ}{PR}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{3}{PR}$$

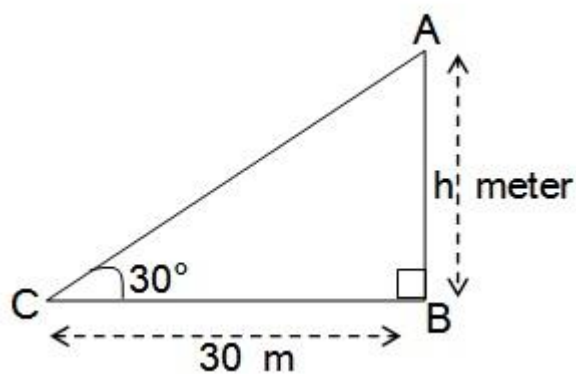
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR}$$

$$PR = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः बड़ी फिसलनपट्टी की लंबाई = $2\sqrt{3}$ मीटर

भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना मीनार AB की ऊँचाई = h मीटर

बिंदु C से मीनार के पाद बिंदु B की दूरी = 30 m

समकोण $\triangle ABC$ में,

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

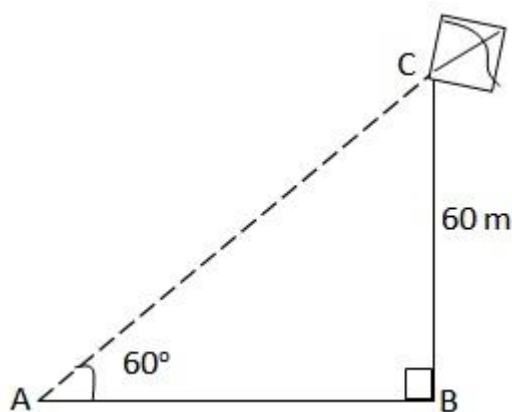
$$\sqrt{3} h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ मीटर

भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना AC डोरी की लंबाई है ।

और भूमि से पतंग की ऊँचाई $h = 60 \text{ m}$ है ।

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{60}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$$

$$AC \times \sqrt{3} = 2 \times 60$$

$$AC = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः डोरी की लंबाई $= 40\sqrt{3}$ मीटर

1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

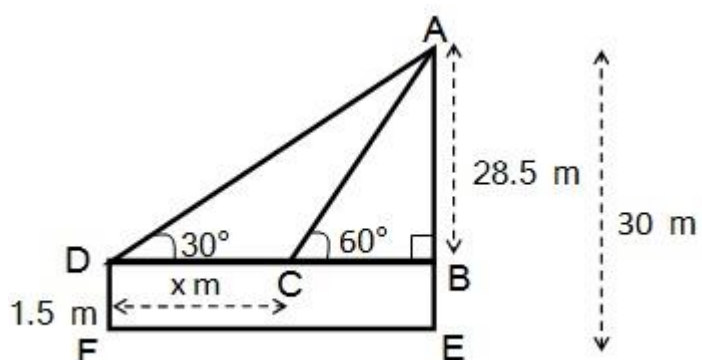
Solution:

माना कि वह लड़का $x \text{ m}$ दूर भवन की ओर गया ।

लड़के ऊँचाई छोड़कर भवन की ऊँचाई $(AB) = 30 \text{ m} - 1.5 \text{ m}$

$$= 28.5 \text{ m}$$

समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{28.5}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{28.5}{BC}$$

$$BC = \frac{28.5}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(1)$$

समकोण त्रिभुज ABD में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{28.5}{x + BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{x + BC}$$

$$BC + x = 28.5 \sqrt{3}$$

$$\frac{28.5}{\sqrt{3}} + x = 28.5 \sqrt{3} \quad \text{समी० (1) से}$$

$$x = 28.5 \sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5 \times 3 - 28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5 (3 - 1)}{\sqrt{3}} = \frac{28.5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 19\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः वह मीनार की ओर $19\sqrt{3} \text{ m}$ गया ।

भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

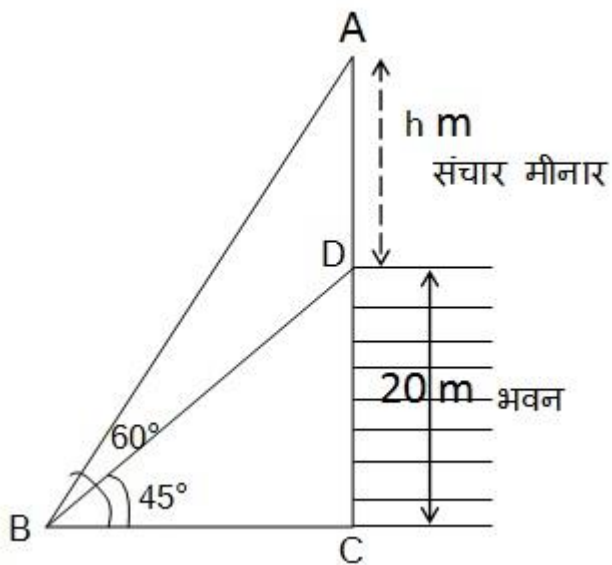
माना संचार मीनार की ऊंचाई $(AD) = h \text{ m}$

भवन की ऊंचाई $(DC) = 20 \text{ m}$

माना भूमि पर वह बिंदु B है।

भवन सहित मीनार की ऊंचाई $(AC) = (20 + h) \text{ m}$

समकोण त्रिभुज BCD में,



$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{20}{BC}$$

$$BC = 20 \text{ m} \dots\dots (1)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{20 + h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{20 + h}{20} \quad \text{समी० (1) से}$$

$$20 + h = 20\sqrt{3}$$

$$h = 20\sqrt{3} - 20$$

$$h = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

$$\text{अतः संचार मीनार की ऊँचाई} = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

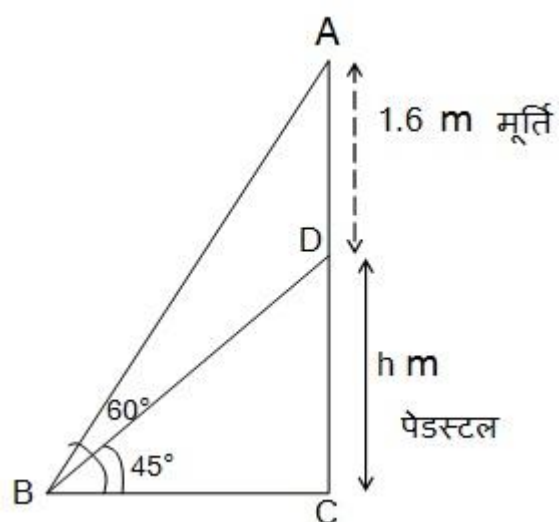
एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना पेडस्टल की ऊँचाई h मीटर है।

$$\text{मूर्ति की ऊँचाई} = 1.6 \text{ m}$$

समकोण त्रिभुज BCD में,



$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h \text{ m} \dots\dots (1)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h + 1.6}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h + 1.6}{h} \text{ समी० (1) से}$$

$$h\sqrt{3} = h + 1.6$$

$$h\sqrt{3} - h = 1.6 \text{ m}$$

$$h(\sqrt{3} - 1) \text{ m} = 1.6 \text{ m}$$

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1}$$

हर का परिमेयीकरण करने पर

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$h = 0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

अतः पेडस्टल की ऊँचाई = $0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$ हैं ।

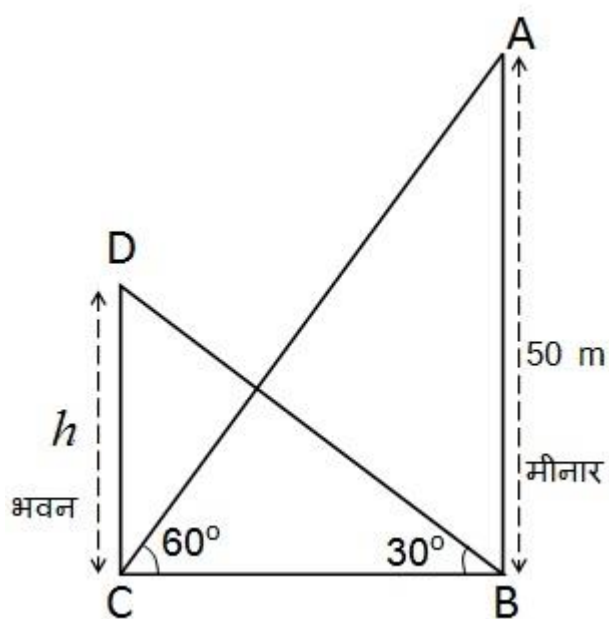
एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की

ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना भवन की ऊँचाई = h m

समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(1)$$

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h\sqrt{3} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$3h = 50$$

$$h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ m}$$

अतः भवन की ऊँचाई $16\frac{2}{3} \text{ m}$ है।

एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:

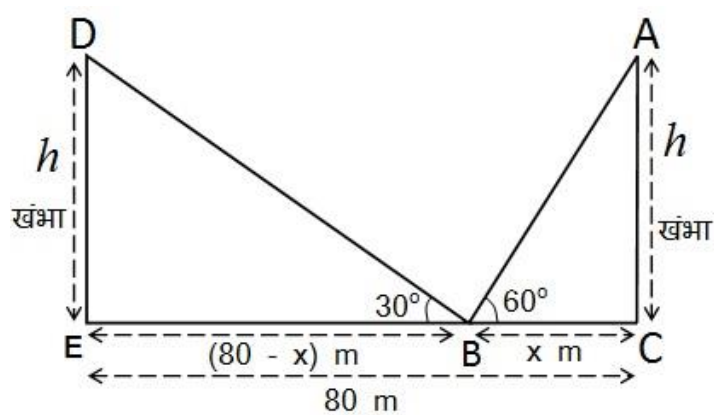
माना भूमि पर वह बिंदु B है।

और खंभों की ऊँचाई = h मी०,

B बिंदु से एक खंभे की दूरी = x m

तो दूसरे खंभे की दूरी = $(80 - x)$ m

समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(1)$$

समकोण त्रिभुज BED में,

$$\tan \theta = \frac{DE}{BE}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(80 - x)}$$

$$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$$

समी० 1 से $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ रखने पर

$$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{3h + h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow 4h = 80\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

समी० में h का मान रखने पर

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 20 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ m}, x = 20 \text{ m}$$

अतः खंभे की ऊँचाई = $20\sqrt{3} \text{ m}$

एक खंभे की दूरी = 20 m

दूसरे खंभे की दूरी = $80 - 20 = 60 \text{ m}$

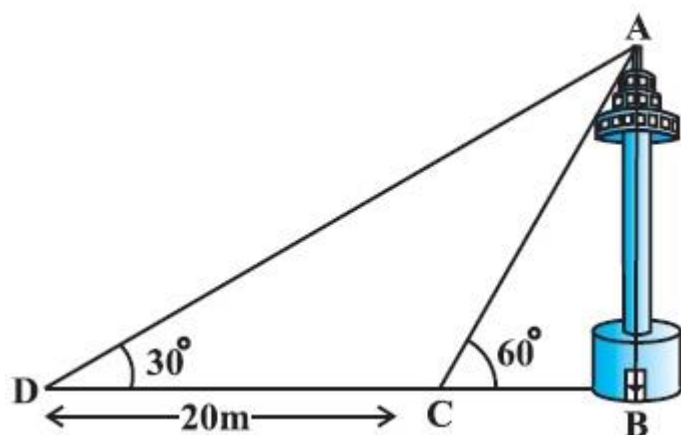
एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर उध्वार्धर खड़ा है टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना टॉवर (AB) की ऊँचाई = h मी०

नहर BC की चौड़ाई = x मी०

समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{DC + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20 + x}$$

$$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

(x का मान रखने पर समी० 1 से)

$$\Rightarrow 20 = h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 20$$

$$\Rightarrow 3h - h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

समी० 1 से

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 10 \text{ m}$$

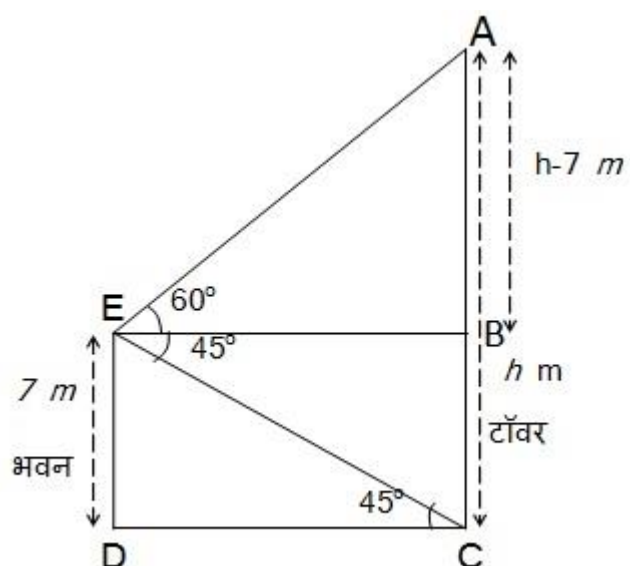
$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3} \text{ m}, x = 10 \text{ m}$$

अतः टावर की ऊँचाई = $10\sqrt{3} \text{ m}$ और

नहर की चौड़ाई = 10 m

7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना टॉवर की ऊँचाई = h मीटर

भवन DE की ऊँचाई = 7 मी०

$DE = BC = 7$ मी०

AB की लंबाई = $h - 7$ मी०

समकोण त्रिभुज EDC में,

$$\tan \theta = \frac{ED}{DC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{7}{DC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{7}{DC}$$

$$DC = 7 \text{ m}$$

$$DC = BE = 7 \text{ m}$$

अब समकोण त्रिभुज ABE में

$$\tan \theta = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h-7}{BE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h-7}{7}$$

$$h - 7 = 7\sqrt{3}$$

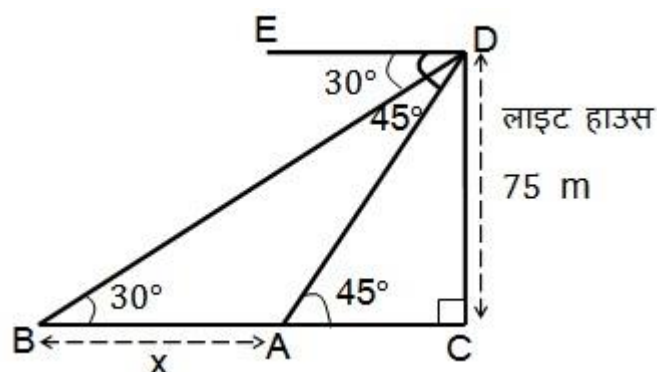
$$h = 7\sqrt{3} + 7$$

$$h = 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

$$\text{टॉवर की ऊँचाई} = 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना दो जहाजों A तथा B हैं

जिनका अवनमन कोण क्रमशः 45° और 30° है।

लाइट-हाउस DC की ऊँचाई = 75 m

चूँकि अवनमन कोण उन्नयन कोण के बराबर होता है।

$$\therefore \angle DAC = 45^\circ \text{ और } \angle DBC = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{75}{AC}$$

$$AC = 75 \text{ m}$$

अब, समकोण त्रिभुज DBC में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{75}{BA + AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BA + 75}$$

$$BA + 75 = 75\sqrt{3} \text{ m}$$

$$BA = 75\sqrt{3} - 75$$

$$BA = 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

दो जहाजों के बीच की दूरी = $75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ है।

1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:

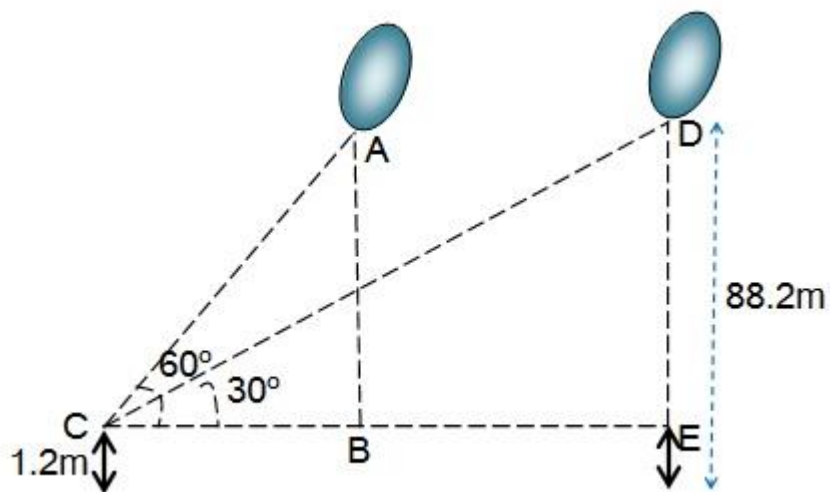
लड़की की ऊँचाई = 1.2 m

भूमि से गुब्बारे की ऊँचाई = 88.2 m

लड़की को छोड़कर गुब्बारे की ऊंचाई = $88.2 - 1.2$

$$AB = DE = 87.0 \text{ m}$$

तय दूरी = BE



समकोण DABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{87}{BC}$$

$$BC = \frac{87}{\sqrt{3}}$$

समकोण $\triangle DEC$ में,

$$\tan \theta = \frac{DE}{CE}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{BC + BE}$$

$$BC + BE = 87\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{87}{\sqrt{3}} + BE = 87\sqrt{3} \text{ m}$$

$$BE = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 3 - 87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(3 - 1)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(2)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 2 \times \sqrt{3}}{3} = 29 \times 2\sqrt{3}$$

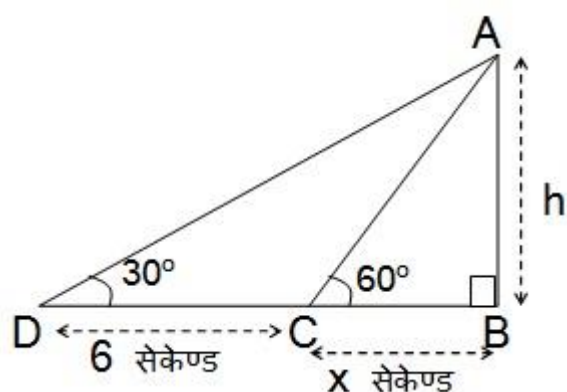
$$BE = 58\sqrt{3} \text{ m}$$

अर्थात् इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दूरी $87\sqrt{3} \text{ m}$ है।

एक सीध राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना कार को बिंदु C से मीनार के पाद B तक पहुँचने में x सेकेण्ड लगता है।



समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \text{ m} \dots\dots\dots (1)$$

समकोण $\triangle ABD$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{6 + x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6 + x}$$

$$6 + x = h\sqrt{3} \text{ m}$$

$$6 + x = (x\sqrt{3})\sqrt{3} \text{ m} \quad [h = x\sqrt{3} \text{ रखने पर}]$$

$$6 + x = 3x$$

$$3x - x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

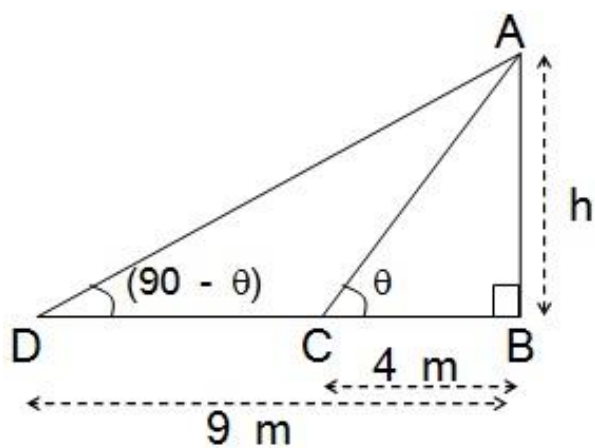
मीनार तक पहुँचने में लगा समय = 3 सेकंड

मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

Solution:

माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर है।

समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{h}{4} \dots\dots\dots (1)$$

समकोण त्रिभुज ABD में,

$$\tan(90 - \theta) = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{h}{9}$$

$$\cot \theta = \frac{h}{9} \dots\dots\dots (2) \quad [\because \tan(90 - \theta) = \cot \theta]$$

समी० (1) को (2) से गुणा करने पर

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{9}$$

$$1 = \frac{h^2}{36}$$

$$h^2 = 36$$

$$h = \sqrt{36}$$

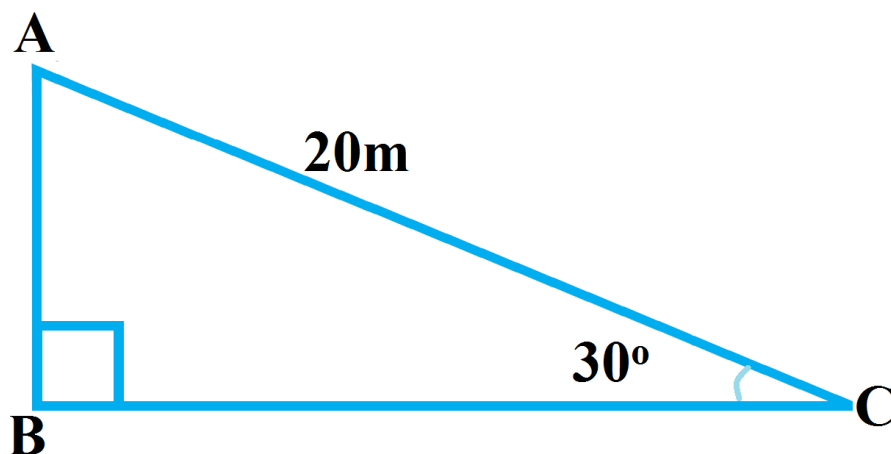
$$h = 6 \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = 6 मीटर है | (सिद्ध हुआ)

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 9.1 (पृष्ठ संख्या 225-227)

प्रश्न 1 सर्कस का एक कलाकार एक 20m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंध हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर- माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$$\theta = 30^\circ$$

समकोण त्रिभुज ABC में;

माना खंभे की उचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$$\theta = 30^\circ$$

समकोण त्रिभुज ABC में;

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

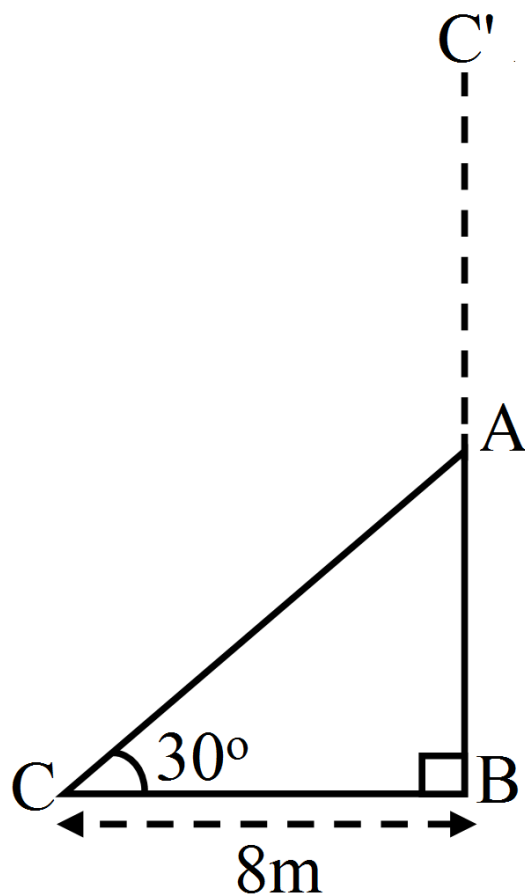
$$2h = 20 \text{ [द्वि पद विधि के प्रयोग से]}$$

$$h = \frac{20}{2} = 10\text{m}$$

अतः खंभे की ऊँचाई = 10 मीटर

प्रश्न 2 आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना पेड़ की ऊँचाई BC' है और पेड़ बिंदु A से टूटकर



जमीन पर बिंदु C पर झुकी है।

$$\theta = 30^\circ, BC = 8\text{m}$$

समकोण त्रिभुज ABC में, AB भुजा के लिए,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$$

$$AB\sqrt{3} = 8$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

इसप्रकार AC भुजा के लिये;

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$$

$$\sqrt{3}AC = 8 \times 2 = 16$$

$$AC = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\text{पेड़ की ऊँचाई} = AB + AC$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

हर परिमेइकरण करने पर

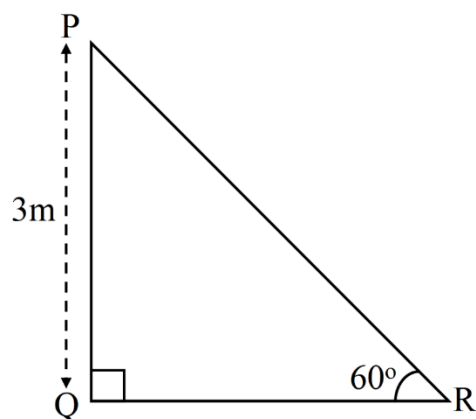
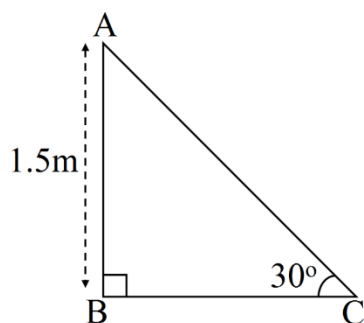
$$\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{अतः पेड़ की ऊँचाई} = 8\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

प्रश्न 3 क ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए

वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?

उत्तर-



i. स्थिति

समकोण त्रिभुज ABC में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई AC है

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC}$$

$$AC \times 1.5 = 3m$$

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = 3 मीटर

ii. स्थिति

समकोण त्रिभुज PRQ में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई PR है

$$\sin \theta = \frac{PQ}{PR}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{3}{PR}$$

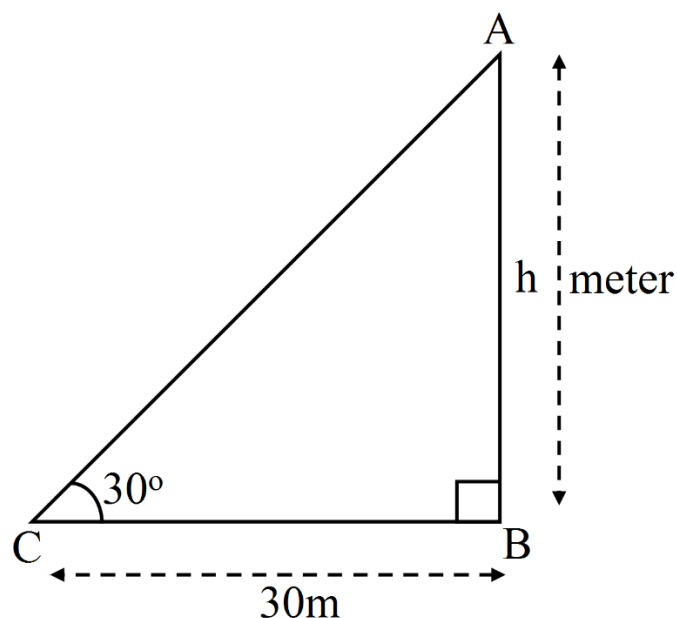
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR}$$

$$PR = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = $2\sqrt{3}$ मीटर

प्रश्न 4 भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना मीनार AB की ऊँचाई = h मीटर

बिंदु C से मीनार के पाद बिंदु B की दूरी = 30m

समकोण $\triangle ABC$ में,

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

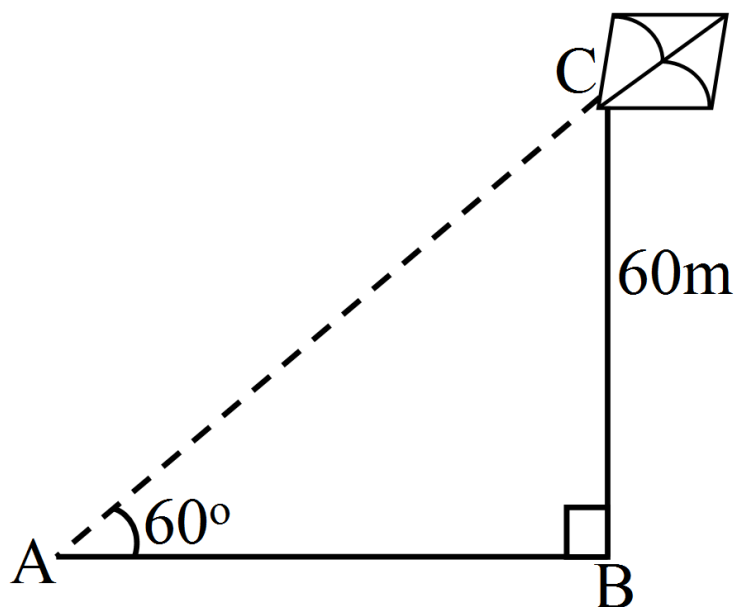
$$\sqrt{3} h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = $10\sqrt{3} \text{m}$ मीटर

प्रश्न 5 भूमि से 60m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना AC डोरी की लंबाई है।

और भूमि की लंबाई है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{60}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$$

$$AC \times \sqrt{3} = 2 \times 60$$

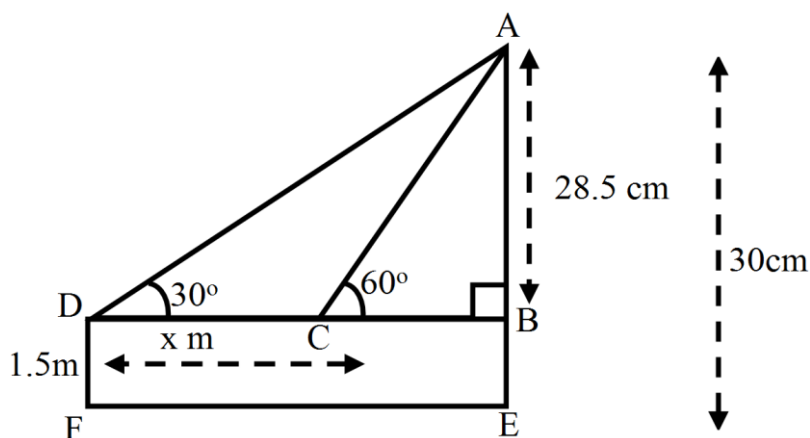
$$AC = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{अतः डोरी की लंबाई} = 40\sqrt{3} \text{m मीटर}$$

प्रश्न 6 1.5m लंबा एक लड़का 30m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

उत्तर- माना कि वह लड़का x m दूर भवन की ओर गया।

लड़के ऊँचाई छोड़कर भवन की ऊँचाई $(AB) = 30 \text{ m} - 1.5 \text{ m} = 28.5 \text{ m}$



समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{28.5}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{28.5}{BC}$$

$$BC = \frac{28.5}{\sqrt{3}} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{28.5}{x+BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{x+BC}$$

$$BC + x = 28.5\sqrt{3}$$

$$\frac{28.5}{\sqrt{3}} + x = 28.5\sqrt{3} \text{ समी (i) से}$$

$$x = 28.5\sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5 \times 3 - 28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5(3-1)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{28.5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$$

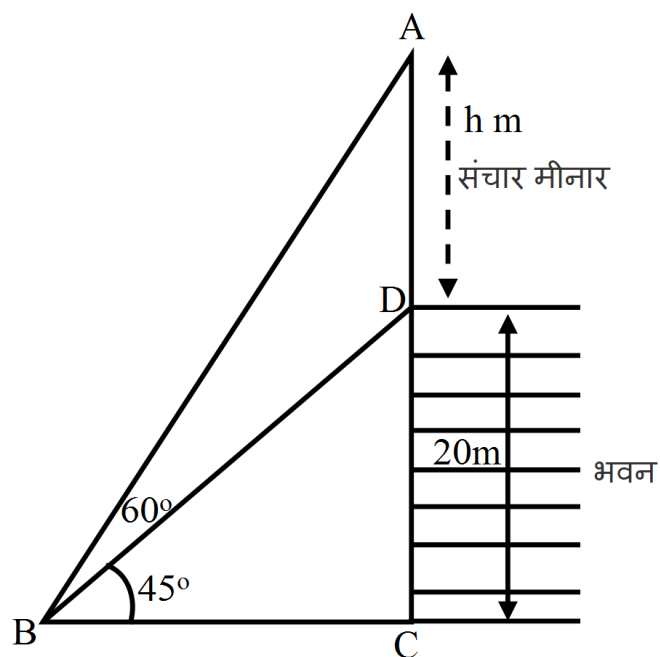
$$x = \frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 19\sqrt{3}m$$

अतः मीनार की औँर = $19\sqrt{3}m$ गया।

प्रश्न 7 भूमि के एक बिंदु से एक 20m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना संचार मीनार की ऊंचाई (AD) = h m

भवन की ऊंचाई (DC) = 20m

माना भूमि पर वह बिंदु B है।

भवन सहित मीनार की ऊंचाई (AC) = (20 + h)m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{20}{BC}$$

$$BC = 20\text{m} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{20+h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{20+h}{20} \text{ समी (i) से}$$

$$20 + h = 20\sqrt{3}$$

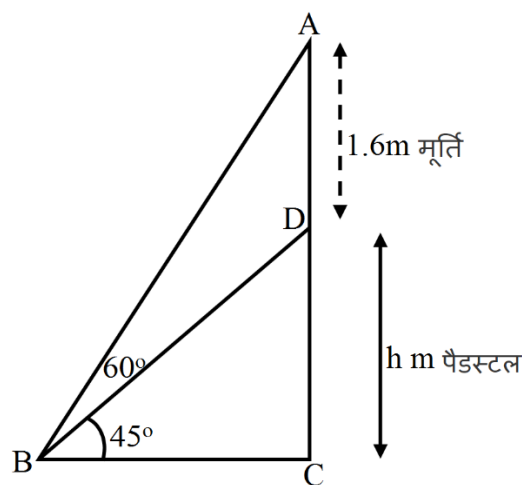
$$h = 20\sqrt{3} - 20$$

$$h = 20(\sqrt{3} - 1)m$$

$$\text{अतः संचार मीनार की ऊँचाई} = 20(\sqrt{3} - 1)m$$

प्रश्न 8 एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना पेडस्टल की ऊँचाई h मीटर है।

मूर्ति की ऊँचाई = 1.6m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h \text{ m} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h+1.6}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h+1.6}{h} \text{ समी (i) से}$$

$$h\sqrt{3} = h + 1.6$$

$$h\sqrt{3} - h = 1.6\text{m}$$

$$h(\sqrt{3} - 1)\text{m} = 1.6\text{m}$$

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$$

हर का परिमेयीकरण करने पर

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

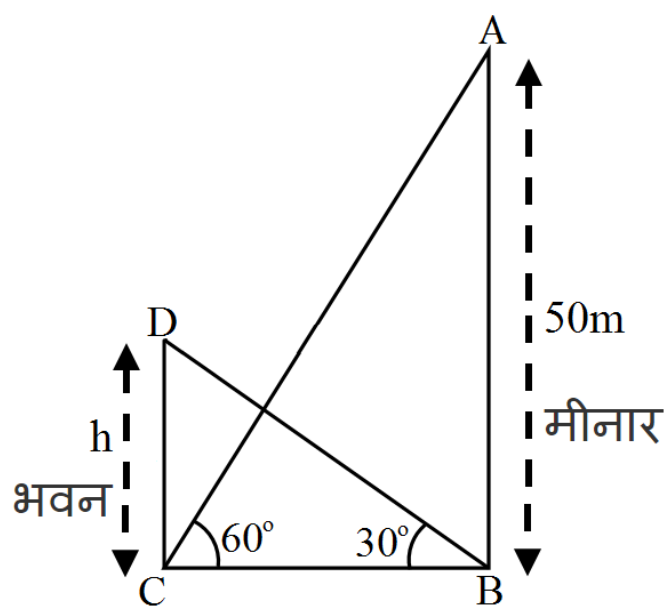
$$= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$h = 0.8(\sqrt{3} + 1)\text{m}$$

अतः संचार मीनार की ऊँचाई $= 0.8(\sqrt{3} + 1)\text{m}$ है।

प्रश्न 9 एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना भवन की ऊँचाई = h mसमकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h\sqrt{3} \dots (ii)$$

$$\frac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

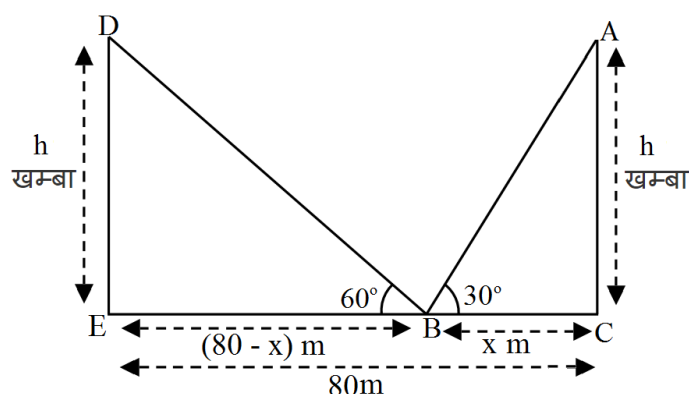
$$3h = 50$$

$$h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ m}$$

अतः भवन की ऊँचाई = $16\frac{2}{3} \text{ m}$ है।

प्रश्न 10 एक 80m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना भूमि पर वह बिंदु B है।

और खंभों की ऊँचाई = h मी०,

B बिंदु से एक खंभे की दूरी = x m

तो दूसरे खंभे की दूरी = (80 - x) m

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज BED में,

$$\tan \theta = \frac{DE}{BE}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(80-x)}$$

$$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$$

समी 1 से $x = \frac{50}{\sqrt{3}}$ रखने पर,

$$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{3h+h}{h} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow 4h = 80\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow h20\sqrt{3} \text{ m}$$

समी में h का मान रखने पर,

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 20\text{m}$$

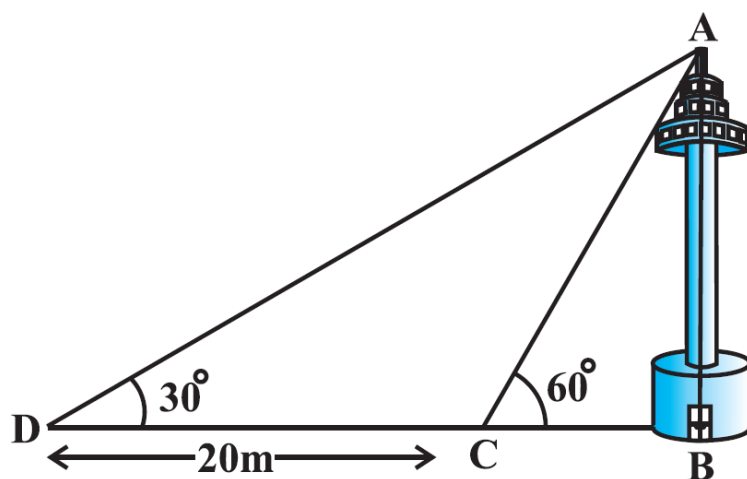
$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3}\text{m}, x = 20\text{m}$$

$$\text{अतः खंभे की ऊँचाई} = 20\sqrt{3}\text{m}$$

$$\text{एक खंभे की दूरी} = 20\text{m}$$

$$\text{दूसरे खंभे की दूरी } 80 - 20 = 60\text{m}$$

प्रश्न 11 एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर उर्ध्वार्धर खड़ा है टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

माना टॉवर (AB) की ऊँचाई = h मी

नहर BC की चौड़ाई = x मी

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{DC+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20+x}$$

$$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

(x का मान रखने समी 1 से)

$$\Rightarrow 20 = h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 20$$

$$\Rightarrow 3h - h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\text{m}$$

समी 1 से

$$x \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 10\text{m}$$

$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\text{m}$$

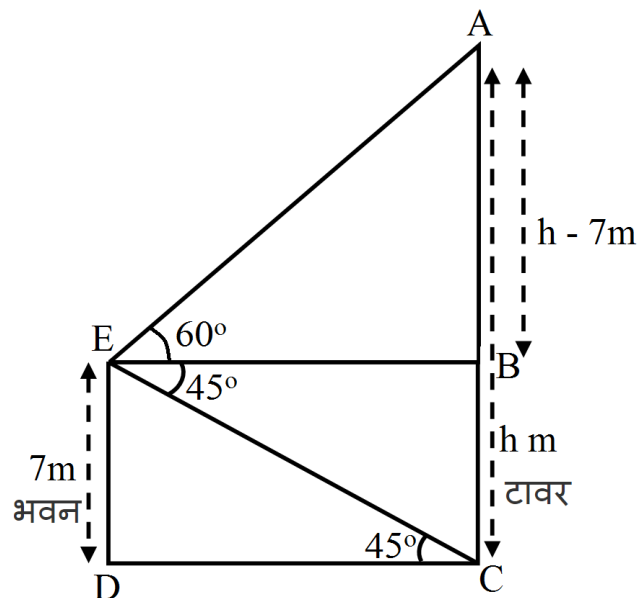
$$x = 10\text{m}$$

अतः टॉवर की ऊँचाई $= 10\sqrt{3}\text{m}$ और

नहर की चौड़ाई $x = 10\text{m}$

प्रश्न 12 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना टॉवर की ऊँचाई $= h$ मीटर

भवन DE की ऊँचाई $= 7$ मी

$$DE = BC = 7 \text{ मी}$$

$$AB \text{ की लंबाई } = h - 7 \text{ मी}$$

समकोण त्रिभुज EDC में,

$$\tan \theta = \frac{ED}{DC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{7}{DC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{7}{DC}$$

$$DC = 7\text{m}$$

$$DC = BE = 7\text{m}$$

अब समकोण त्रिभुज ABE में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h-7}{BE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h-7}{7}$$

$$h - 7 = 7\sqrt{3}$$

$$h = 7\sqrt{3} + 7$$

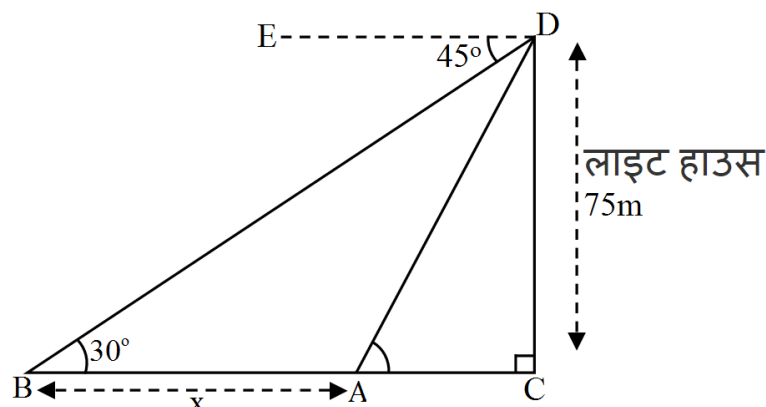
$$h = 7(\sqrt{3} + 7)\text{m}$$

अतः टॉवर की ऊँचाई $h = 7(\sqrt{3} + 7)\text{m}$ और

प्रश्न 13 समुद्र-तल से 75m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं।

यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना दो जहाजों A तथा B है।

जिनका अवनमन कोण क्रमशः 45° और 30° है।

लाइट-हाउस DC की ऊँचाई = 75m

चूँकि अवनमन कोण उन्नयन कोण के बराबर होता है।

$$\therefore \angle DAC = 45^\circ \text{ और } \angle DBC = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{75}{AC}$$

$$AC = 75m$$

अब समकोण त्रिभुज DBC में,

$$\tan \theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{75}{BA+AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BA+75}$$

$$BA + 75 = 75\sqrt{3}m$$

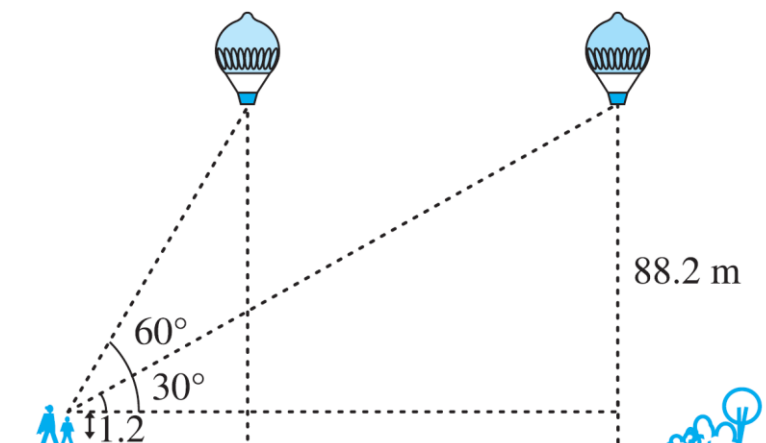
$$BA = 75\sqrt{3} - 75$$

$$BA = 75(\sqrt{3} - 1)m$$

दो जहाजों के बीच की दूरी = $75(\sqrt{3} - 1)m$ है।

प्रश्न 14 1.2m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है।

किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए।



उत्तर- लड़की की ऊँचाई = 1.2m

भूमि से गुब्बारे की ऊँचाई = 88.2m

लड़की को छोड़कर गुब्बारे की ऊँचाई = 88.2 - 1.2

AB = DE = 87.0m

तय दूरी = BE

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{87}{BC}$$

$$BC = \frac{87}{\sqrt{3}}$$

अब समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{DE}{CE}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{BC+BE}$$

$$BE = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 3 - 87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(3-1)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(2)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87 \times 2 \times \sqrt{3}}{3}$$

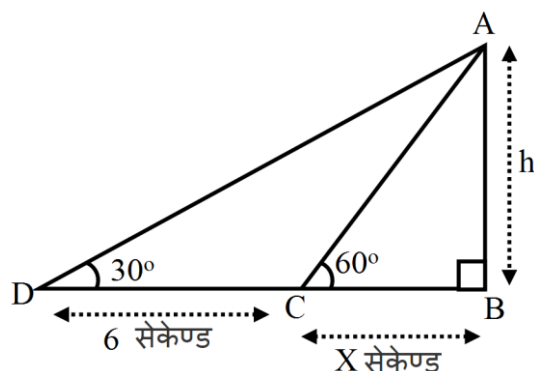
$$= 29 \times 2\sqrt{3}$$

$$BE = 58\sqrt{3}m$$

अर्थात् इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी $= 58\sqrt{3}m$ दुरी है।

प्रश्न 15 एक सीध राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना कार को बिंदु C से मीनार के पाद B तक पहुँचने में x सेकेण्ड लगता है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \dots (i)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$BC = x\sqrt{3}m \dots (i)$$

अब समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{6+x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6+x}$$

$$6 + x = h\sqrt{3}m$$

$$6 + x = (x\sqrt{3})\sqrt{3}m \text{ [} h = x\sqrt{3} \text{ रखने पर]}$$

$$6 + x = 3x$$

$$3x - x = 6$$

$$2x = 6$$

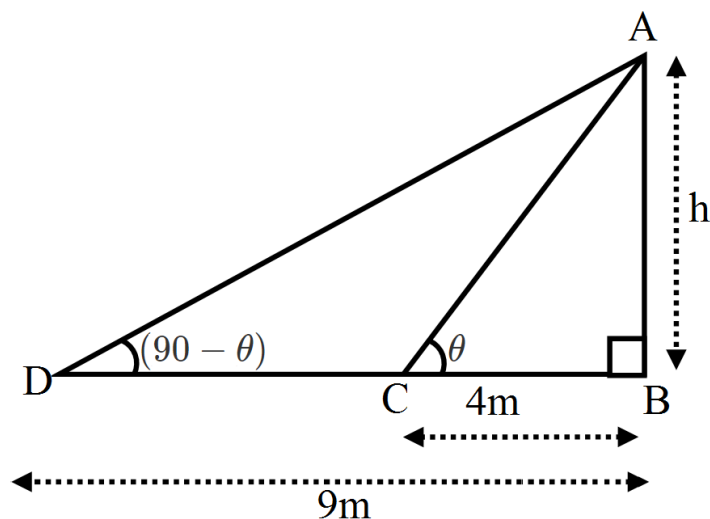
$$x = 3$$

$$= 29 \times 2\sqrt{3}$$

मीनार तक पहुँचने में लगा समय = 3 सैकंड

प्रश्न 16 मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4m और 9m की दूरी पर स्थित दो बंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6m है।

उत्तर-



माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर है।

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{h}{4} \dots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan(90 - \theta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{h}{9}$$

$$\cot \theta = \frac{h}{9} \dots (ii) [\because \tan(90 - \theta) = \cot \theta]$$

समी (i) को (ii) से गुणा करने पर

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{9}$$

$$1 = \frac{h^2}{36}$$

$$h^2 = 36$$

$$h = \sqrt{36}$$

$$h = 6\text{m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = 6 मीटर है।