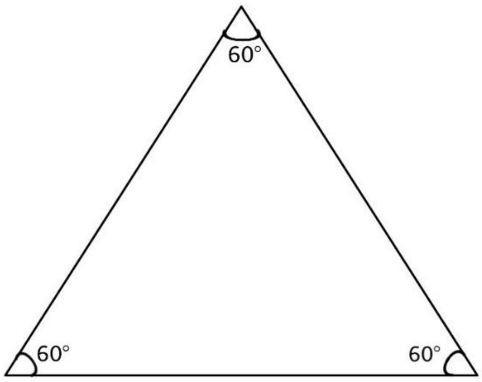
गणित

अध्याय-6: त्रिभुज

त्रिभुज क्या है

तीन रेखाखण्डों से घिरी हुई समतलीय आकृति त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज को Δ से निरूपित किया जाता है। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



ΔABC एक समकोणिक त्रिभुज है।
यह एक न्यूनकोण त्रिभुज भी है।

त्रिभुजों का वर्गीकरण

त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्नलिखित दो आधार पर किया जा सकता है:

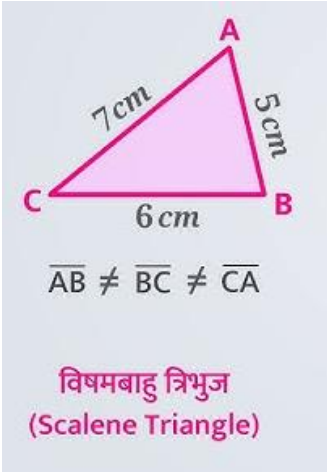
(i) भुजाओं के आधार पर

(ii) कोणों के आधार पर

भुजाओं के आधार पर त्रिभुज

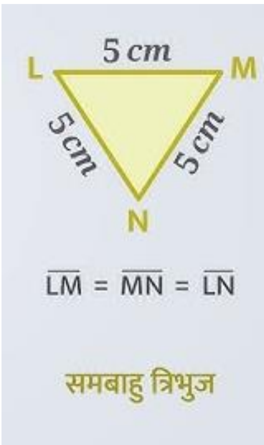
भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

- विषमबाहु त्रिभुज



- समद्विबाहु त्रिभुज

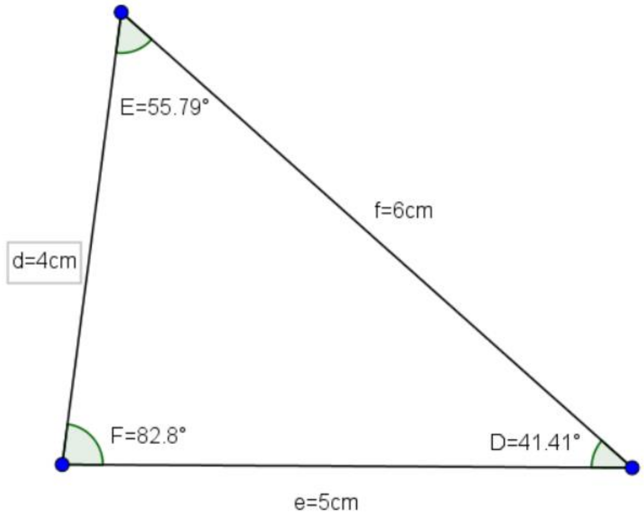
- समबाहु त्रिभुज



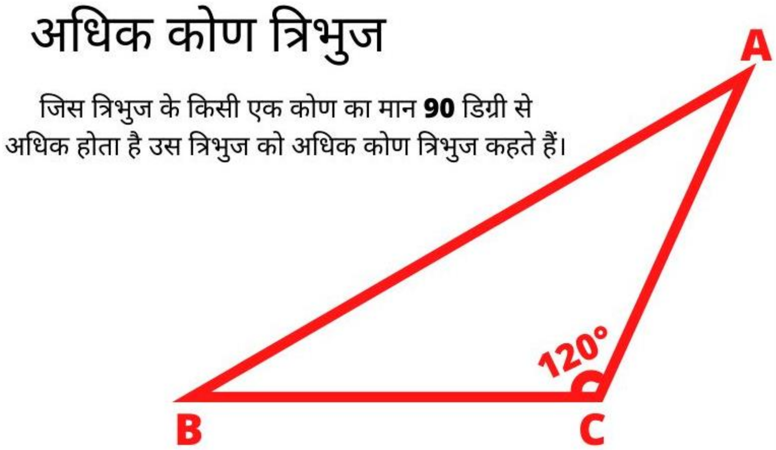
कोणों के आधार पर त्रिभुज

कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

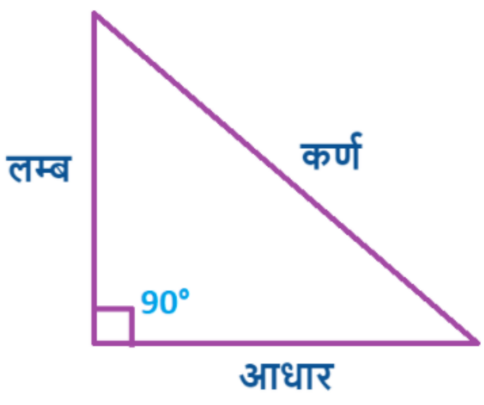
- न्यून कोण त्रिभुज



- अधिक कोण त्रिभुज



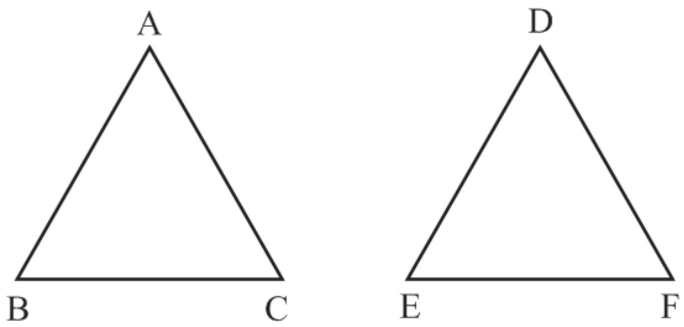
- समकोण त्रिभुज



सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

सर्वांगसम त्रिभुज

जब दो त्रिभुज की सारी भुजाओं एवं कोणों का माप समान होता है तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



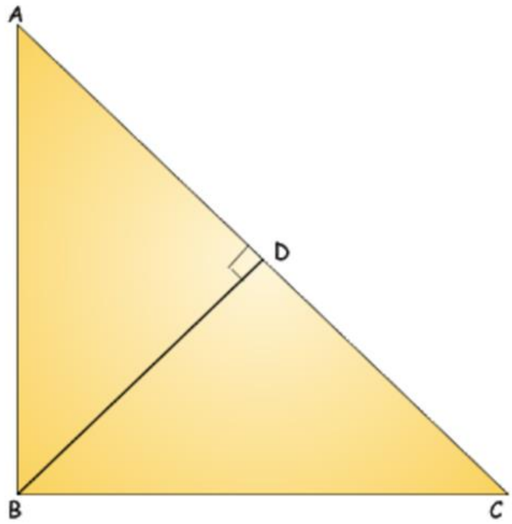
समरूप त्रिभुज

दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

(i) यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

(ii) यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

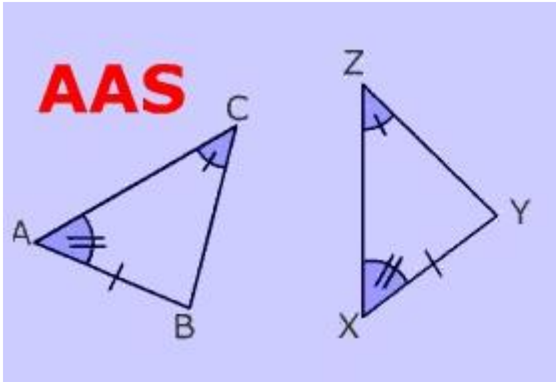
(iii) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा उन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।



सर्वांगसमता के प्रकार

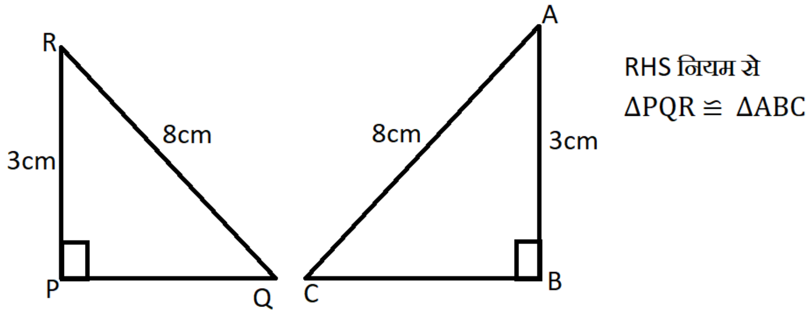
(i) AAS (कोण-कोण-भुजा):

यदि दो त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म माप में बराबर हों, और संगत गैर-शामिल भुजाओं का एक युग्म लंबाई में बराबर हो, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। ...



(ii) RHS (समकोण-कर्ण-पक्ष):

यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई समान है, और छोटी भुजाओं का एक युग्म लंबाई में समान है, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



(समकोण त्रिभुज में RHS सर्वांगसमता नियम)

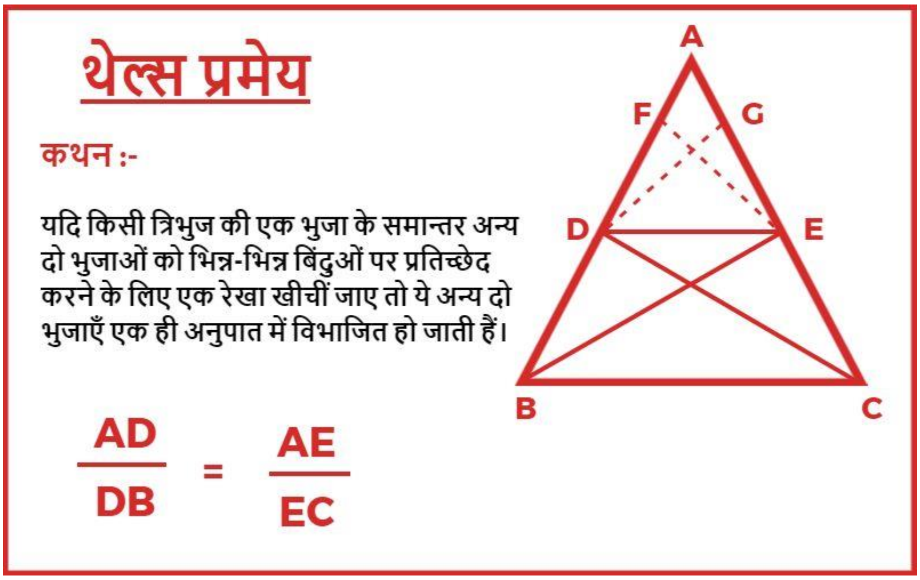
कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार

कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

1. **न्यून कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसके तीनों कोण, न्यूनकोण (90° से कम) हों।)
2. **अधिक कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसका कोई एक कोण, अधिककोण (90° से अधिक) हो।)
3. **समकोण त्रिभुज:** (जिसका एक कोण 90 अंश का (अर्थात, समकोण) हो।)

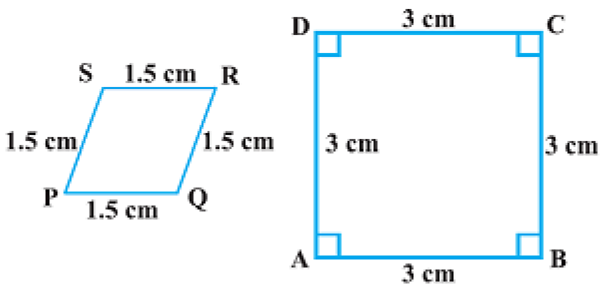
थेल्स (Thales) के प्रमेय

ज्यामिति में थेल्स के प्रमेय (Thales' theorem) के अनुसार किसी भी वृत्त के परिधि पर स्थित तीन बिन्दुओं A, B तथा C हो तो कोण ABC का मान ९० अंश होगा यदि AC उस वृत्त का कोई व्यास हो। यह प्रमेय 'अन्त:निर्मित कोण प्रमेय' (inscribed angle theorem) का एक विशेष रूप है।



प्रश्न

बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं:



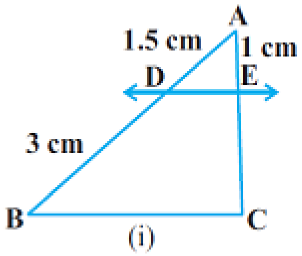
हल:

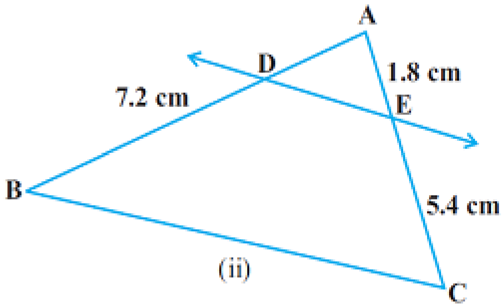
दिये गये चतुर्भुज समरूप नहीं है।

चूँकि दोनों आकृतियों के संगत भुजा समानुपाती हैं परंतु संगत कोण बराबर नहीं हैं।

प्रश्न

आकृति (i) और (ii) में, DE||BC है। (i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए:





हल:

दिया गया है:

चित्र (i) में

AD = 1.5 cm

BD = 3 cm

AE = 1 cm

तथा DE || BC

तब EC = ?

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

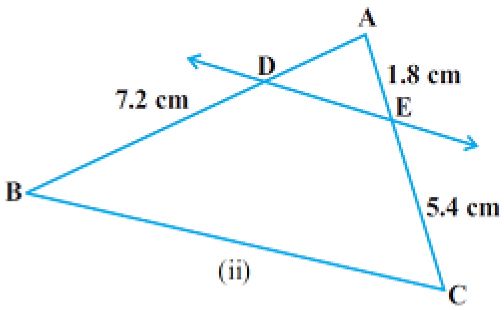
चित्र से AD, DB तथा AE का मान रखने पर,

$$\frac{1.5\ cm}{3\ cm} = \frac{1\ cm}{EC}$$

बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$EC \times 1.5\ cm = 3\ cm \times 1\ cm$$
$$\Rightarrow EC = \frac{3\ cm \times 1\ cm}{1.5\ cm}$$
$$\Rightarrow EC = 2\ cm$$

चित्र (ii) में:



DB = 7.2 cm

AE = 1.8 cm

EC = 5.4 cm तथा

DE || BC

तब, AD=?

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

DB, AE तथा EC का मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{AD}{7.2\ cm} = \frac{1.8\ cm}{5.4\ cm}$$

बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$AD = \frac{1.8\ cm \times 7.2\ cm}{5.4\ cm}$$
$$\Rightarrow AD = 2.4\ cm$$

अत: (i) में EC = 2 cm और (ii) में AD = 2.4 cm उत्तर

प्रश्न

किसी $\triangle$ PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमश: बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF || QR है:

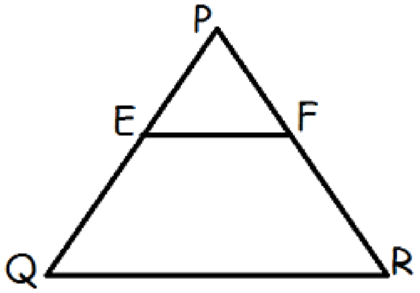
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

(iii) PQ =1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

हल:

मान लिया कि दिया गया त्रिभुज चित्र के अनुसार है,



(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9\ cm}{3\ cm}$

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = 1.3$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{3.6\ cm}{2.4\ cm}$

$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{3}{2} = 1.5$

यहाँ चूँकि $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

अतः **EF ∦ QR उत्तर**

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{4}{4.5}$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{8}{9} = \frac{4}{4.5}$

अत: $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

अत: EF ‖ QR **उत्तर**

(iii) PQ =1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18\ cm}{PQ - PE}$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18\ cm}{1.28\ cm - 0.18\ cm}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10}$$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{0.36\ cm}{PR - PF}$

$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36\ cm}{2.56\ cm - 0.36\ cm}$$

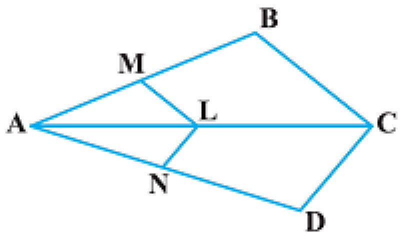
$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{0.18}{1.10}$$

अत: EF ‖ QR **उत्तर**

प्रश्न

आकृति में यदि LM ‖ CB और LN ‖ CD हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$



हल:

दिया गया है, LM ∥ CB

अत: $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ AML

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} \text{ ---------- (i)}$$

पुन: दिया गया है, LN ∥ CD

अत: $\triangle$ ACD ~ $\triangle$ ALN

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

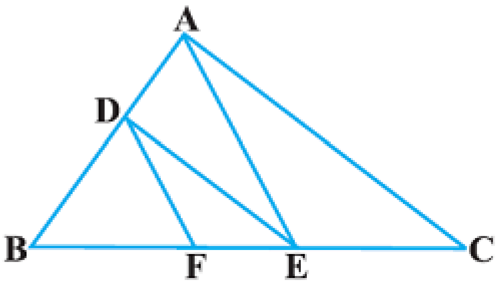
$$\frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC} \text{ ---------- (ii)}$$

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$ प्रमाणित।

प्रश्न

दिये गये आकृति में DE ∥ AC और DF ∥ AE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$



हल:

दिया गया है, DE ∥ AC

अत: $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DBE

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA}$$ -------------- (i)

पुन: दिया गया है, DF ∥ AE

अत:

$\triangle$ ABE ~ $\triangle$ DBF

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

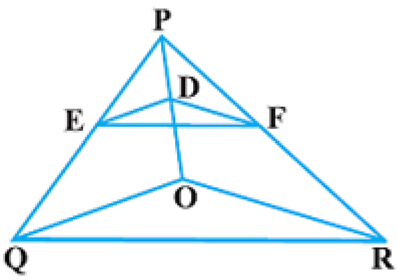
$$\frac{BF}{FE} = \frac{BD}{DA} \text{ --------------- (ii)}$$

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$ प्रमाणित।

प्रश्न

आकृति में DE ∥ OQ और DF∥OR है। दर्शाइए कि EF ∥ QR है।



हल:

दिया गया है, DE ∥ OQ

अत: △ POQ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \text{ -------(i)}$$

पुन: दिया गया है, DF ∥ OR

अत: △ POR में ,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \text{ ------------- (ii)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) के द्वारा,

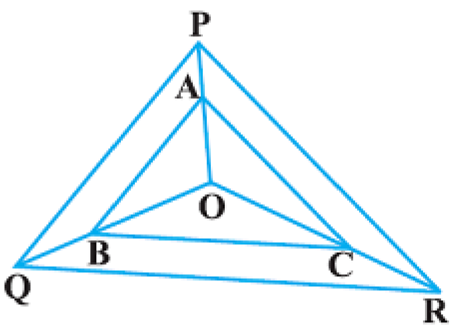
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अत: आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम के अनुसार

EF ∥ QR प्रमाणित।

प्रश्न

दिये गये आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि AB ∥ PQ और AC ∥ PR है। दर्शाइए कि BC ∥ QR है।



हल:

दिया गया है, AB ∥ PQ

अत: △ OPQ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \text{ ---------------- (i)}$$

पुन: दिया गया है, AC ∥ PR

अत: △ ORP में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \text{ ---------------- (i)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

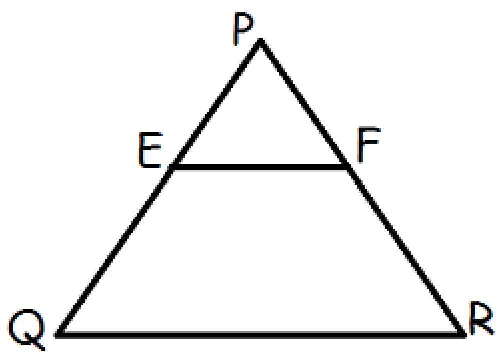
अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय विलोम के अनुसार

BC ∥ QR प्रमाणित

प्रश्न

प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गए रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं)

हल:



मान लिया कि PQR एक त्रिभुज है, तथा बिन्दु E इस त्रिभुज के PQ भुजा पर मध्य बिन्दु है।

अत: PE = EQ (चूँकि E इस भुजा का मध्य बिन्दु है)

अब EF रेखा त्रिभुज की भुजा QR के समानांतर खींची गई।

अब चूँकि EF ∥ QR

अत: $\frac{PF}{FR}=\frac{PE}{EQ}$

$\Rightarrow \frac{PF}{FR}=\frac{PE}{PE}$

[∵ PE = EQ]

$\Rightarrow \frac{PF}{FR}=1$

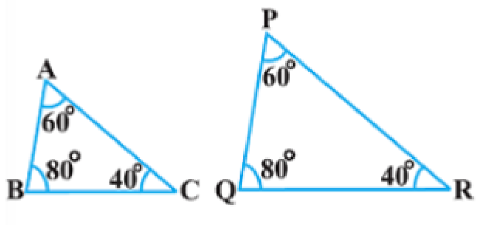
बज्र गुणन करने पर हम पाते हैं कि

$PF=FR$

अत: EF रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा AR को समद्विभाजित करती है। प्रमाणित

प्रश्न

बताइए कि दिये गये आकृति में दिये गये त्रिभुजों के युग्मों में से कौन कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 

हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\angle A = \angle P = 60^o$$

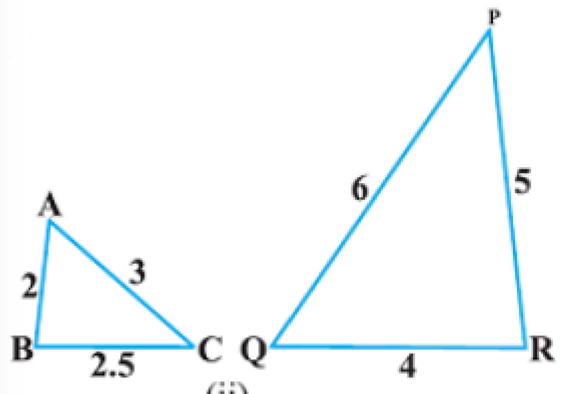
$$\angle B = \angle Q = 80^o$$

तथा

$$\angle C = \angle R = 40^o$$

अत: AAA के द्वारा △ ABC ~ △ PQR

(ii)



(ii)

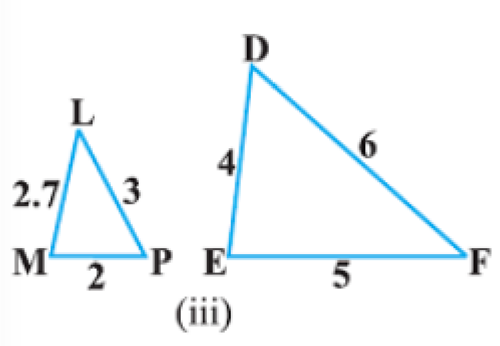
हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP} = \frac{1}{2}$$

अत: SSS के द्वारा △ ABC ~ △ PQR

(iii)

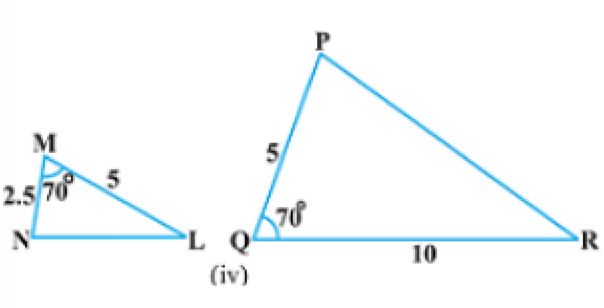


हल:

चूँकि दिये गये दोनों त्रिभुजों की भुजाएं न तो बराबर हैं और न ही अनुपात में हैं।

अत: $\triangle$ LMP $\nsim$ $\triangle$ DEF

(iv)



हल:

दिये गये त्रिभुजों में

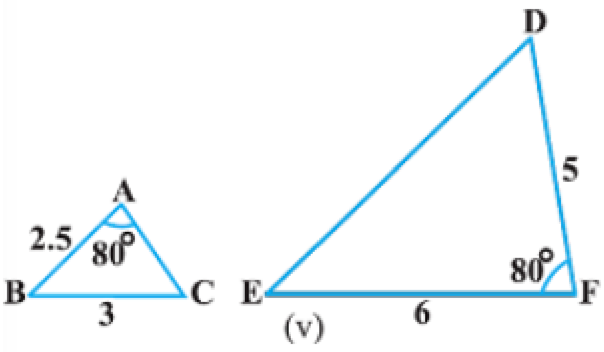
$\angle M = \angle Q = 70^o$

तथा, $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{ML}{QR}$

अत: SAS के प्रमेय के अनुसार,

$\triangle$ MNL ~ $\triangle$ PQR

(v)

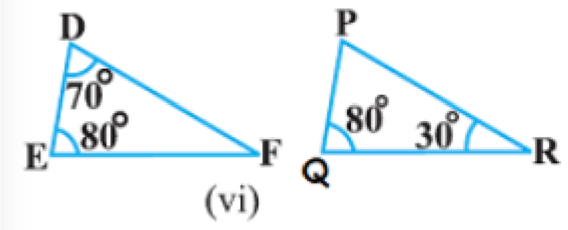


हल:

चूँकि संबंधित भुजाएं समान अनुपात में नहीं हैं,

अत: $\triangle$ ABC ≁ $\triangle$ DEF

(vi)



हल:

$\triangle$ DEF में

$$\angle F = 180^o - (70^{\oplus}80^o)$$

$$\Rightarrow \angle F = 30^o$$

$\triangle$ PQR में

$\angle P = 180^o - (80^{\oplus}30^o)$

$\Rightarrow \angle P = 70^o$

चूँकि दिये गये त्रिभुजों के कोण बराबर हैं,

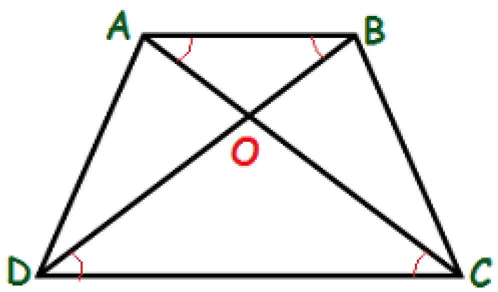
अत: AAA के अनुसार

△ DEF ~ △ PQR

प्रश्न

समलंब ABCD, जिसमें AB ∥ DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ हैं

हल:



मान लिया कि दिया गया समलंब ABCD है।

जिसमें AB ∥ DC है, तथा विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अब △ DOC तथा △ BOA में,

$\angle CDO = \angle ABO$ [चूँकि AB ∥ CD अत: ये एकांतर अंत: कोणों के युग्म हैं]

फिर,

$\angle DCO = \angle BAO$

[चूँकि AB || CD अत: ये एकांतर अंत: कोणों के युग्म (Pairs of alternate interior angles) हैं]

तथा,

$\angle DOC = \angle BOA$

[उर्ध्वाकार सम्मुख कोण हैं।]

अत: AAA (कोण-कोण-कोण) कसौटी के द्वारा

$\triangle$ DOC ~ $\triangle$ BOA

चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं।

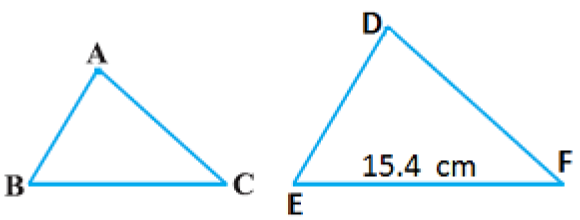
अत: $\dfrac{DO}{BO} = \dfrac{OC}{OA}$

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ **प्रमाणित**

प्रश्न

मान लिजिए कि $\triangle$ AB ~ $\triangle$DEF है और इनके क्षेत्रफल क्रमश : 64 cm^2 और 121 cm^2 हैं। यदि EF = 15.4 cm हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

हल:



मान लिया कि ABC तथा DEF दो त्रिभुज हैं।

दिया गया है,

$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF

ar (ABC) = 64 cm^2

ar (DEF) = 121 cm^2

तथा, EF = 15.4 cm

अत: BC = ?

हम जानते हैं कि यदि दो त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हों, तो

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64cm^2}{121cm^2} = \left(\frac{BC}{15.4cm}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BC}{15.4cm}\right) = \sqrt{\frac{64cm^2}{121cm^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{15.4cm} = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4cm}{11} = 11.2cm$$

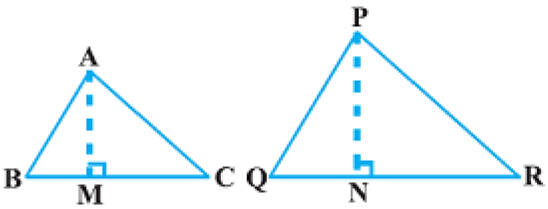
अत: BC = 11.2 cm उत्तर

प्रश्न

यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हल:

मान लिया कि ABC तथा PQR दो सर्वांगसम त्रिभुज हैं।



हम जानते हैं कि, यदि

$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ PQR

$$\text{तो, } \frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

दिया गया है, ar (ABC) = ar(PQR)

$$\text{अत: } 1 = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

$$\text{अब यदि } \frac{AB}{PQ} = 1$$

$$\therefore AB = PQ$$

उसी तरह, BC = QR तथा CA = RP

अत: SSS (भुजा-भुजा-भुजा) कसौटी के आधार पर

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

अर्थात दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं प्रमाणित

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) सभी वृत्त ________ होते है (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग _______ होते हैं (समरूप, सर्वांगसम)

(iii) सभी ________ त्रिभुज समरूप होते है (समबाहु, समद्विबाहु)

(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण ________ हो तथा उनकी संगत _______ भुजाएँ हों (बराबर, समानुपाती)

उत्तर-

(i) सभी वृत्त **समरूप** होते है

(ii) सभी वर्ग **समरूप** होते हैं

(iii) सभी **समबाहु** त्रिभुज समरूप होते है

(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण **बराबर** हो तथा उनकी संगत **समानुपाती** भुजाएँ हों

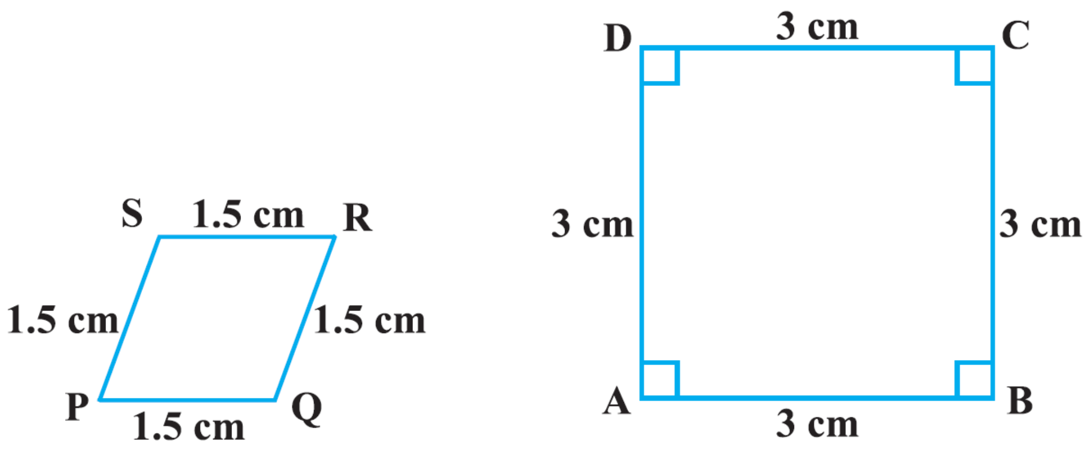
प्रश्न 2 निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए:

1. समरूप आकृतियाँ
2. ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं

उत्तर-

1. दो सौ रुपये के नोट।
2. दो पाँच रुपये के सिक्के।

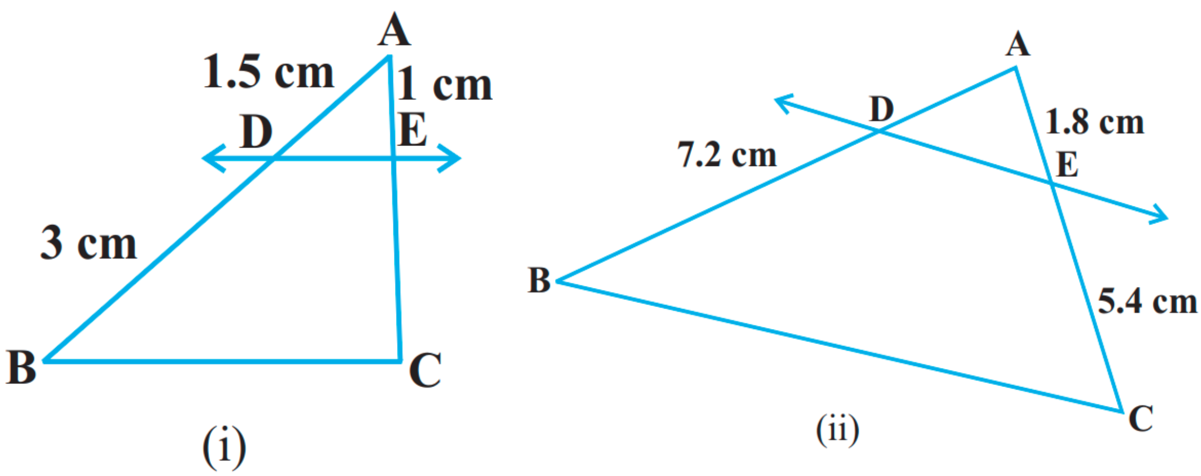
प्रश्न 3 बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं:



उत्तर- नहीं, क्योंकि संबंधित कोण समान नहीं हैं।

प्रश्नावली 6.2 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 आकृति (i) और (ii) में, DE || BC में AD ज्ञात कीजिए:



उत्तर-

1. $\triangle ABC$ में

$DE \parallel BC$ दिया है।

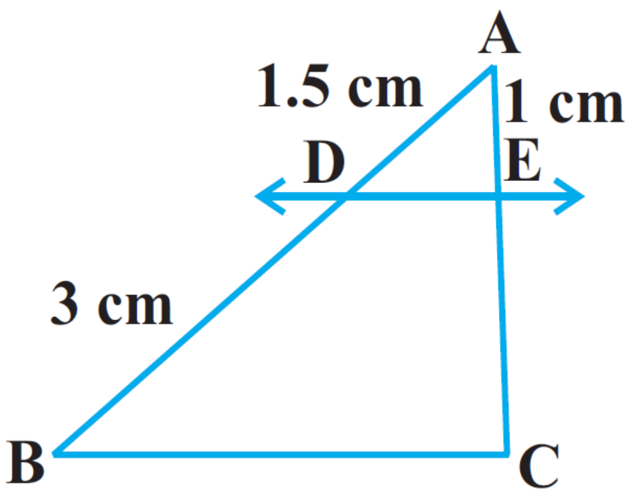
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{2} = \frac{1}{CE}$$

$$\Rightarrow 1.5CE = 3$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow CE = 2$$



2. $\triangle ABC$ में

$DE \parallel BC$ दिया है।

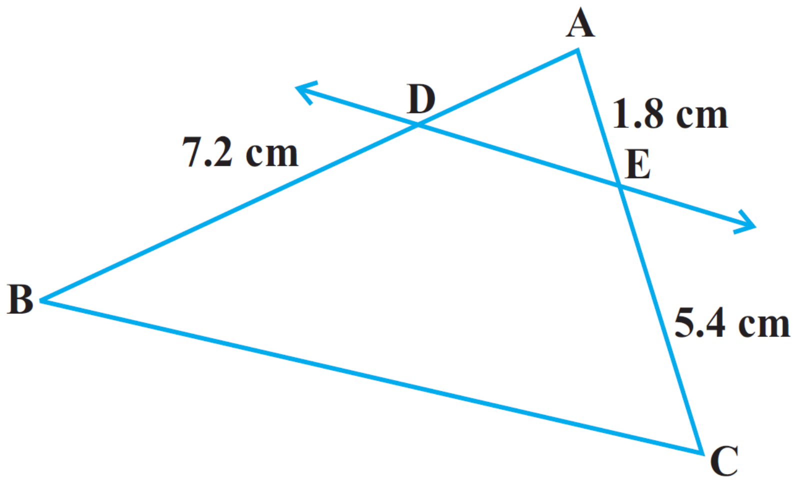
अतः आधरभूतिक समानुपातिक (BPT) से

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4}$$

$$\Rightarrow EC = 2.4 \text{ cm}$$



प्रश्न 2 किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं| निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF || QR है

(i) PE = 3.9cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4cm

(ii) PE = 4cm, QE = 4.5cm, PF = 8cm और RF = 9cm

(iii) PQ = 1.28cm, PR = 2.56cm, 0.18cm और PF = 0.36cm

उत्तर-

(i)

$$\text{PE} = 3.9\text{cm},\ \text{EQ},\ \text{PF} = 3.6 \text{ और } \text{FR} = 2.4\text{cm}$$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

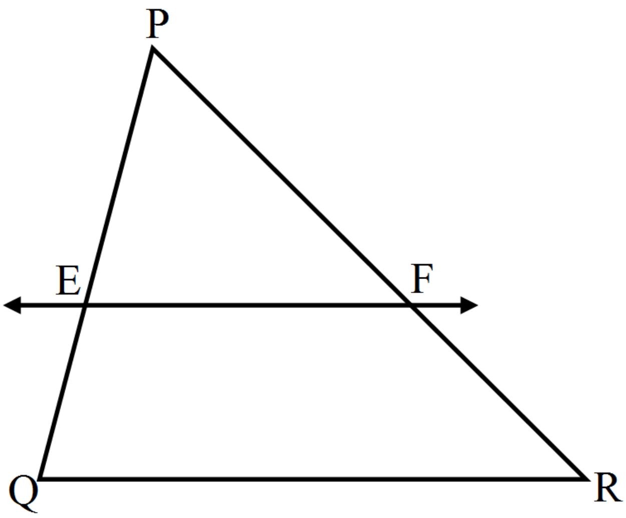
$$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$$

इसलिए, EF || QR नहीं है



(ii)

$$PE = 4cm,\ QE = 4.5cm,\ PF = 8cm \text{ और } FR = 9cm$$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

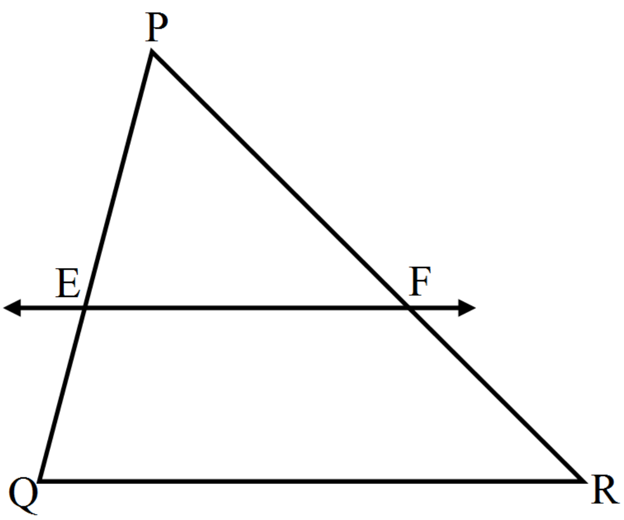
$$\Rightarrow \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय EF || QR है



(iii)

$$PQ = 1.28\text{cm},\ PR = 2.56\text{cm},\ PE = 0.18\text{cm} \text{ और } PF = 0.36\text{cm}$$

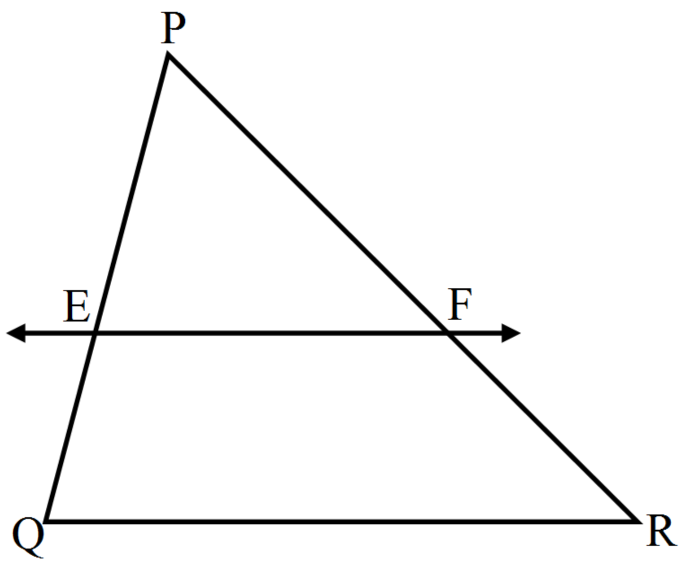
$$\therefore \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$$

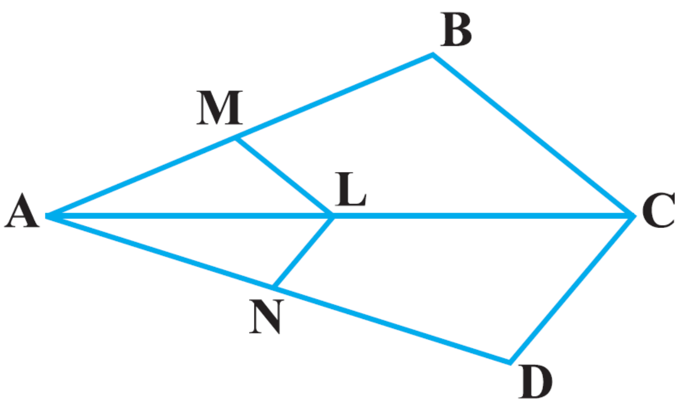
अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय EF || QR है



प्रश्न 3

आकृति में दिय $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए की $\frac{AM}{AM} = \frac{AN}{AD}$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में

$ML \,||\, BC$ दिया है

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \ldots (1)$$

$\triangle ACD$ में

$NL \,||\, DC$ दिया है।

अतः आधारबुटिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

$$\frac{BM+AM}{AM} = \frac{ND+AN}{AN}$$

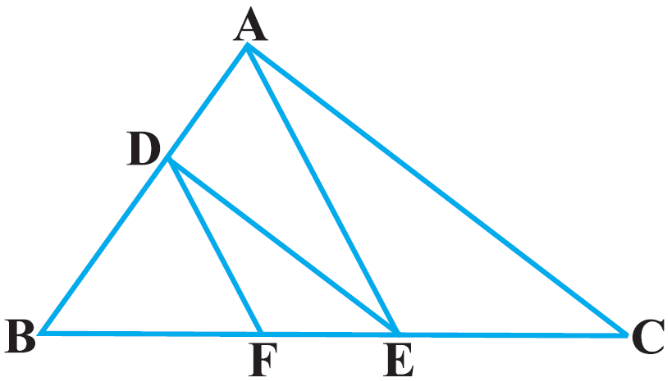
$$\frac{AB}{AB} = \frac{AD}{AN}$$

पुनः व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

प्रश्न 4

आकृति में $\mathrm{DE} \parallel \mathrm{AC}$ और $\mathrm{DF} \parallel \mathrm{AF}$ है सिद्ध कीजिए की $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$ है।



उत्तर-

$\triangle \mathrm{ABC}$ में

$\mathrm{DE} \parallel \mathrm{AC}$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \ldots (1)$$

$\triangle \mathrm{ABE}$ में

$\mathrm{DF} \parallel \mathrm{AE}$ दिया है।

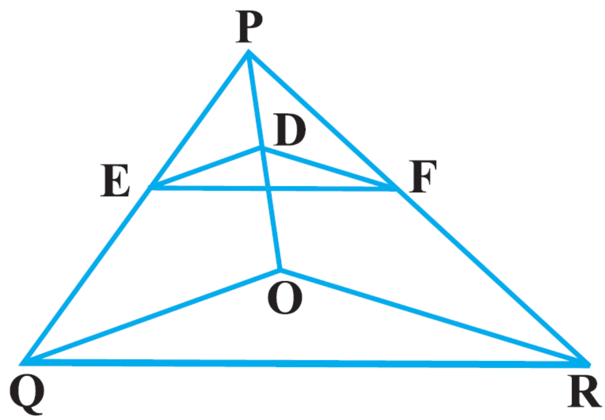
अतः आधरभूतिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EC}}$$

प्रश्न 5 आकृति में DE || OQ और OR है दर्शाइय की EF || QR है।



उत्तर-

$\triangle POQ$ में

$DE \parallel OQ$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \ldots (1)$$

$\triangle POR$ में

$DF \parallel OR$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PF}{ER} = \frac{PD}{DO} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

इसलिए आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

$EF \parallel QR$

प्रश्न 6 आकृति में क्रमश: OP, OQ और OR पर स्तिथ बिंदु A, B और C इस प्रकार है की AB || PQ और AC || PR है। दर्शाइए की BC || QR है।

उत्तर-

$\triangle \mathrm{POQ}$ में

$\mathrm{AB} \mid\mid \mathrm{PQ}$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BQ}} \ldots(1)$$

$\triangle \mathrm{POR}$ में

$\mathrm{AC} \mid\mid \mathrm{PR}$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CR}} \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

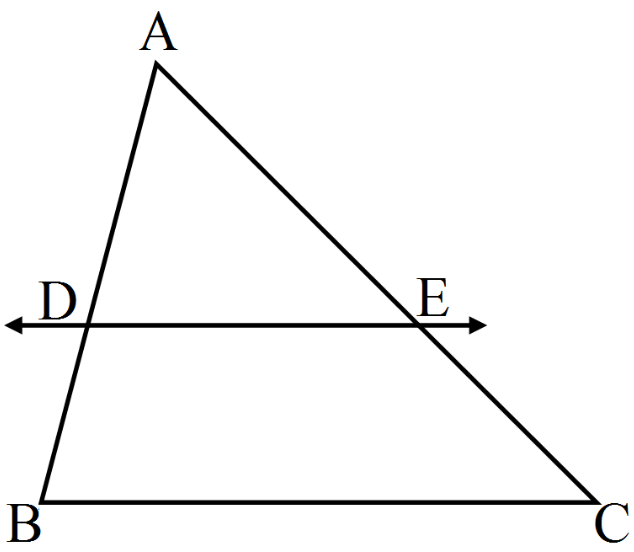
$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BQ}}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CR}}$$

चुकी भुजायए समानुपातिक है।

$\mathrm{BC} \mid\mid \mathrm{QR}$ इति सिद्ध

प्रश्न 7 प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है| (याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और DE || BC है।

सिद्ध करना है: $\mathrm{AE} = \mathrm{EC}$

प्रमाण: $\triangle\mathrm{ABC}$ में

$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} \ldots (1)$ दिया है।

$\mathrm{DE} \,||\, \mathrm{BC}$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$\therefore \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{CE}}$

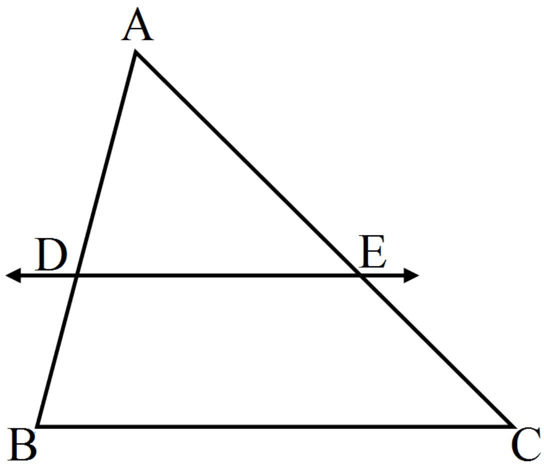
अथवा $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}} \ldots (1)$

अथवा $\frac{1}{1} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}}$

$\Rightarrow \mathrm{AE} = \mathrm{EC}$ इति सिद्ध

प्रश्न 8 प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है| (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु D क्रमश E है।

सिद्ध करना है: $\mathrm{DE} \| \mathrm{BC}$

प्रमाण: $\triangle \mathrm{ABC}$ में

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BD} \ldots(1)$$

$$\mathrm{AE}=\mathrm{EC} \ldots(2)$$

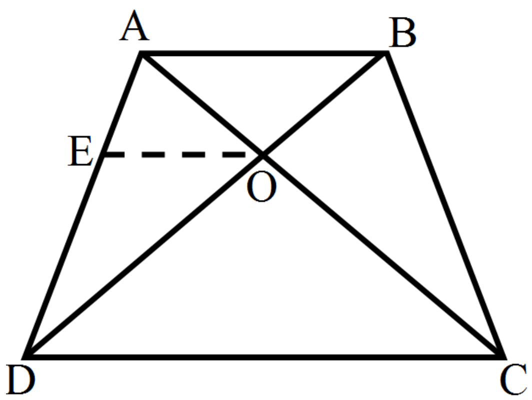
$$\therefore \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}}$$

अथवा $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}=\frac{1}{1}$

समीकरण (1) तथा (2) से,

प्रश्न 9 ABCD एक समलंब है जिसमे AB || DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। दर्शाइ की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

उत्तर-



दिया है: ABCD समलब है जिसमे,

AB || CD है। और विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

इसीप्रकार, $\triangle ABD$ में

$$EO \parallel CD \ldots (3)$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \ldots (5)$$

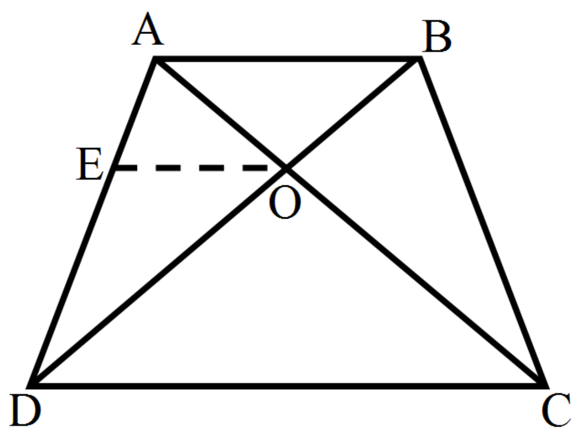
समीकरण (4) तथा (4) से

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

प्रश्न 10 एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए की ABCD एक समलब है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमे विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

और $\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{DO}}$ है

सिद्ध करना है: ABCD एक समलंब है।

रचना: बिंदु O से AB || EO खींचा।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{CO}} \ldots (1)$$

जबकी, $\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{DO}}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

अथवा $\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{CO}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DO}} \ldots (2)$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{CO}}$$

$\triangle ACD$ की सगत खंड की भुजाये समानुपाती है। इसलिए आधारबुटिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम प्रमेय से,

$$EO \parallel CD \ldots (3)$$

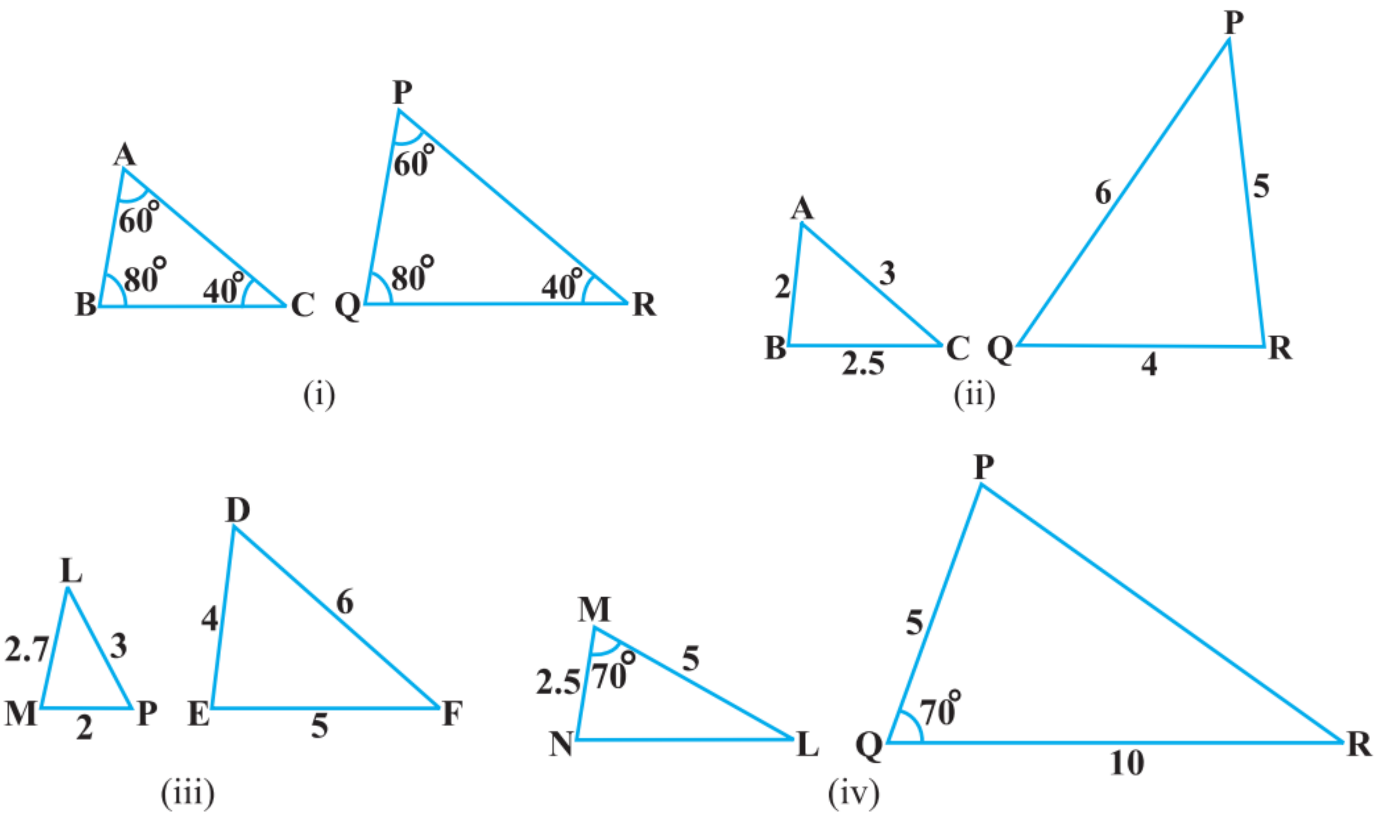
और,

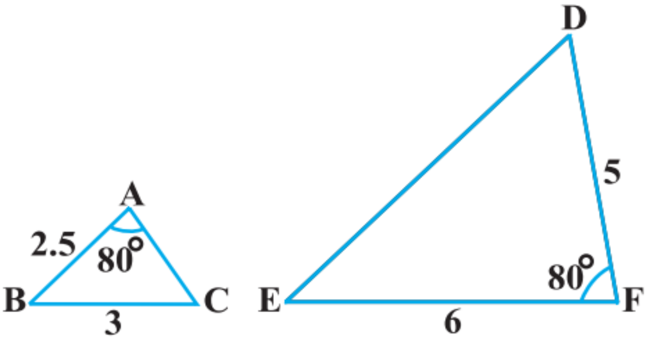
$$AB \parallel CD$$

अतः ABCD एक समलब है इति सिद्ध

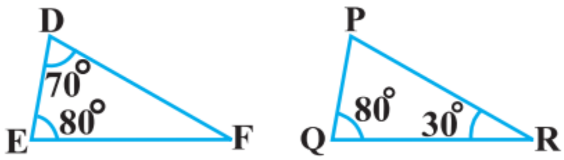
प्रश्नावली 6.3 (पृष्ठ संख्या 153-155)

प्रश्न 1 बताइए कि आकृति में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देनें में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए





(v)



(vi)

उत्तर-

(i)

$$\triangle ABC \text{ तथा } \triangle PQR \text{ में}$$

$$\angle ABC = \angle PQR = 80^\circ$$

$$\angle BAC = \angle QPR = 60^\circ$$

$$\angle ACB = \angle PQR = 8 = 40^\circ$$

$$\therefore AAA \text{ समरूपता कसौटी से}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

(ii)

$$\triangle ABC \text{ तथा } \triangle QRP \text{ में}$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{BC} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore SSS \text{ समरूपता कसौटी से}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

(iii) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।
(iv) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

(v) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है

(vi)

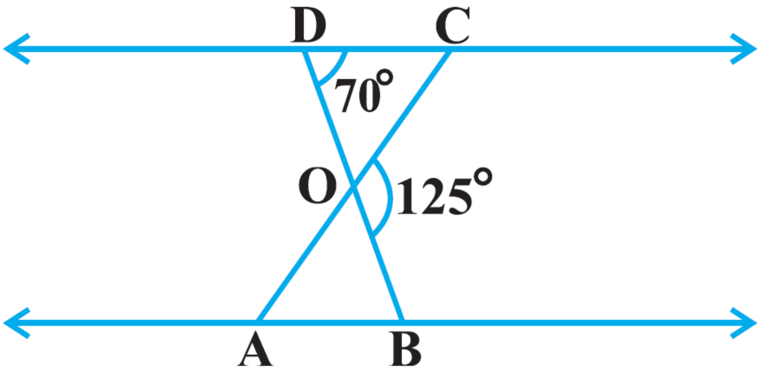
$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

प्रश्न 2 आकृति में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\triangle BOC = 125°$ और $\angle CDO = 70°$ है| $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

$\angle DOC + \angle BOC = 180°$ (रैखिक युग्म)

$$\Rightarrow \angle DOC + 125° = 180°$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180° = 125°$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55°$$

अब $\triangle DOC$ में,

$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 0 = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow 125^\circ \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$

$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$ (दिया है)

$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं|

प्रश्न 3 ABCD, जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए की $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$ है।

उत्तर-

दिया है: समलब ABCD,

जिसमे $AB \,||\, CD$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिछेदक करते है।

सिद्ध करना है: $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$

प्रमाण: $AB \,||\, CD$ दिया है।

$\therefore \angle ABO = \angle DCO \ldots (1)$

$\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$\angle ABO = \angle DCO \ldots (1)$

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

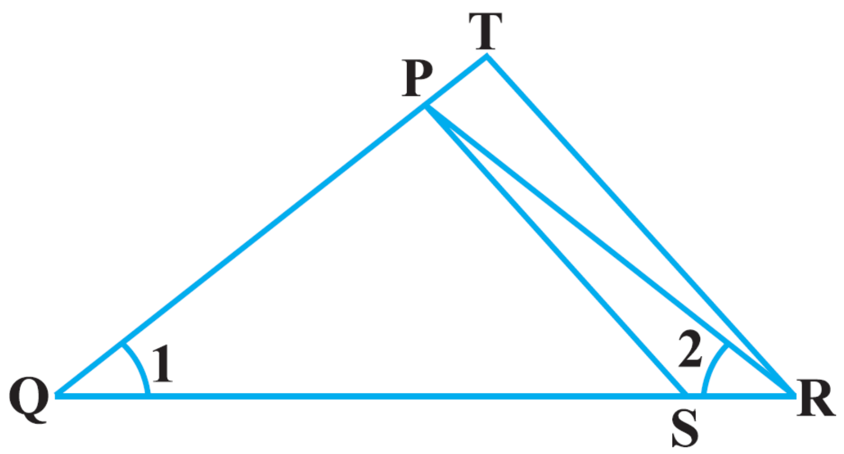
A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle AOB \sim \triangle COD$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ समरूप त्रिभुज के सगत भुजा समानुपाती होते है।

प्रश्न 4

आकृति 3.36 में $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए की $\angle PQS \sim \angle TQR$ है।



उत्तर-

दिया है: $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है।

सिद्ध करना है: $\triangle PQS \sim \triangle TQR$

प्रमाण: $\triangle PQR$ में,

$\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

$\therefore PQ = PR$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ...(1)

और $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{QR}{QR} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण (1) से...(2)

$\triangle PQS$ तथा $\triangle TQR$

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण ... (2)

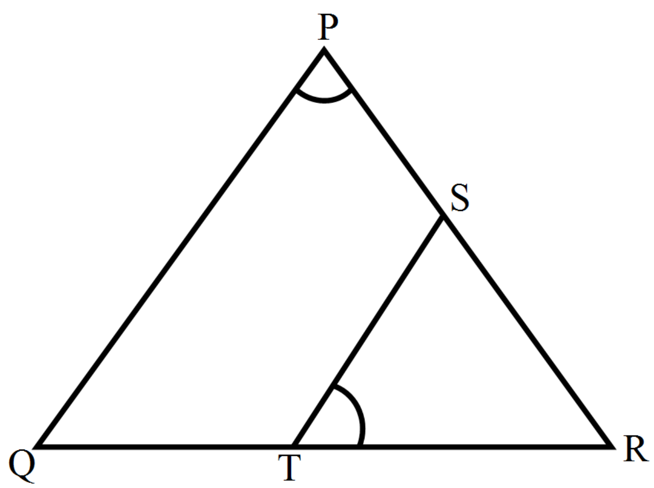
$\angle 1 = \angle 1$

SAS समरूपता कसौटी से

$\triangle PQS \sim \triangle TQR$ इति सिद्ध

प्रश्न 5 DPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि ∠P = ∠RTS है दर्शाइए कि △RPQ ~ △RTS है

उत्तर-



दिया है: DPQR की भुजाओं PR और QR पर

क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है

सिद्ध करना है: $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$

प्रमाण: $\triangle RPQ$ तथा $\triangle RTS$ में,

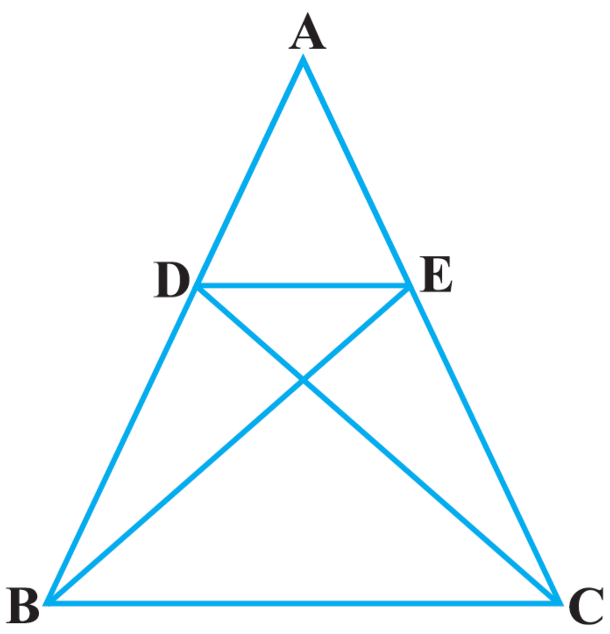
$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ROQ \sim \triangle RTS$

प्रश्न 6 आकृति में, यदि △ABC ≅ △ACD है, तो दर्शाइए कि △ADE ~ △ABC है।



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है

सिद्ध करना है: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

प्रमाण: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ दिया है

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array}\right\}$$

अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} \ldots (1)$

$\triangle ADE$ तथा $\triangle ABC$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \ldots (1)$$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

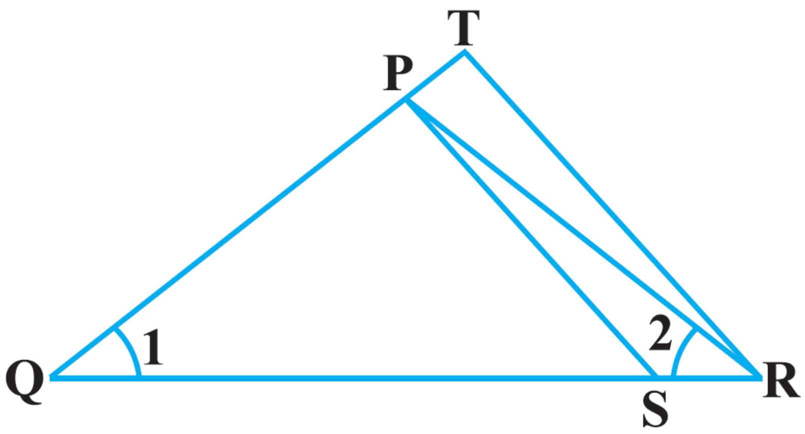
S.A.S समरूपता कसौटी से

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

इति सिद्धम।

प्रश्न 7 आकृति में, DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाइए कि:

1. $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
2. $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
3. $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
4. $\triangle PDE \sim \triangle BEC$



उत्तर-

दिया है: DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:

1. $\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{CDP}$
2. $\triangle \mathrm{ABD} \sim \triangle \mathrm{CBE}$
3. $\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{ADB}$
4. $\triangle \mathrm{PDE} \sim \triangle \mathrm{BEC}$

1. $\triangle \mathrm{AEP}$ तथा $\triangle \mathrm{CDP}$ में,

$\angle \mathrm{AEP} = \angle \mathrm{CDP}$ (प्रत्येक 90°)

$\angle \mathrm{APE} = \angle \mathrm{CPD}$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{CDP}$

2. $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBE$ में

$\angle ADB = \angle CEB$ (प्रत्येक 90°)

$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ABD \sim \triangle CBE$

3. $\triangle AEP$ तथा $\triangle ADB$ में

$\angle AEP = \angle ADB$ (प्रत्येक 90°)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle AEP \sim \triangle ADB$

4. $\triangle PDE$ तथा $\triangle BEC$ में

$\angle PDC = \angle BEC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle PDE \sim \triangle BEC$

प्रश्न 8 समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है दर्शाइए कि $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है|

सिद्ध करना है: $\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रमाण: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\angle AEB = \angle CBE \ldots (1)$ एकान्तर कोण

$\triangle ABE$ तथा $\triangle CFB$ में,

$\angle AEB = \angle CBE$ समी० (1) से

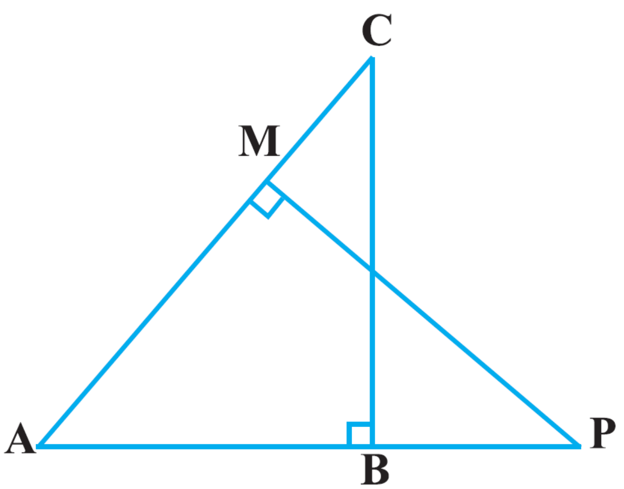
$\angle A = \angle C$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से,

$\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रश्न 9 आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं सिद्ध कीजिए कि:

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMP$
2. $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



उत्तर- दिया है: ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है:

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

2. $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

1. $\triangle ABC$ तथा $\triangle AMP$

$\angle ABC = \angle AMP$ (प्रत्येक 90°)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

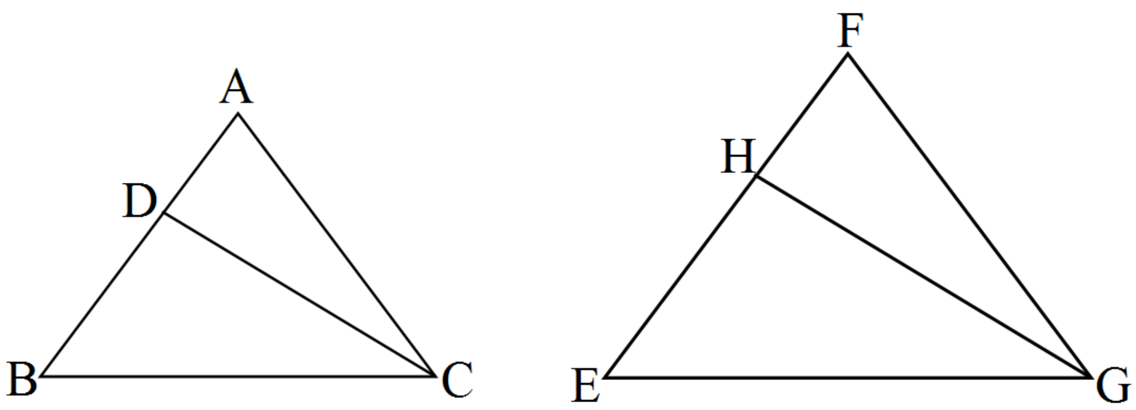
$\triangle ABC \sim \triangle AMP$

2. $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं है।)

प्रश्न 10 CD और GH क्रमश: $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमश: $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

1. $\triangle DCB \sim \triangle HGE$
2. $\triangle DCA \sim \triangle HGF$



उत्तर- दिया है: CD और GH क्रमशः ∠ACB और ∠EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः △ABC और △FEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और △ABC ~ △FEG है।

सिद्ध करना है:

1. $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
2. $\triangle DCB \sim \triangle HGE$
3. $\triangle DCA \sim \triangle HGF$

प्रमाण:

$\triangle ABC \sim \triangle FEG$ दिया है।

$$\left.\begin{array}{c}\angle A = \angle A \ldots (1) \\ \angle B = \angle E \ldots (2) \\ \angle C = \angle G \ldots (3)\end{array}\right\}$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं ।)

1. $\triangle DCB$ तथा $\triangle AMP$ में
2. $\triangle DCB$ तथा $\triangle HGE$ में,

   $\angle B = \angle E$ समी० (2) से

   $\angle BCD = \angle EGH$ [चूँकि $\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$ समी० (3) से]

   A.A समरूपता कसौटी से,

   $\triangle DCB \sim \triangle HGE$

3. $\triangle DCA$ तथा $\triangle HGF$ में

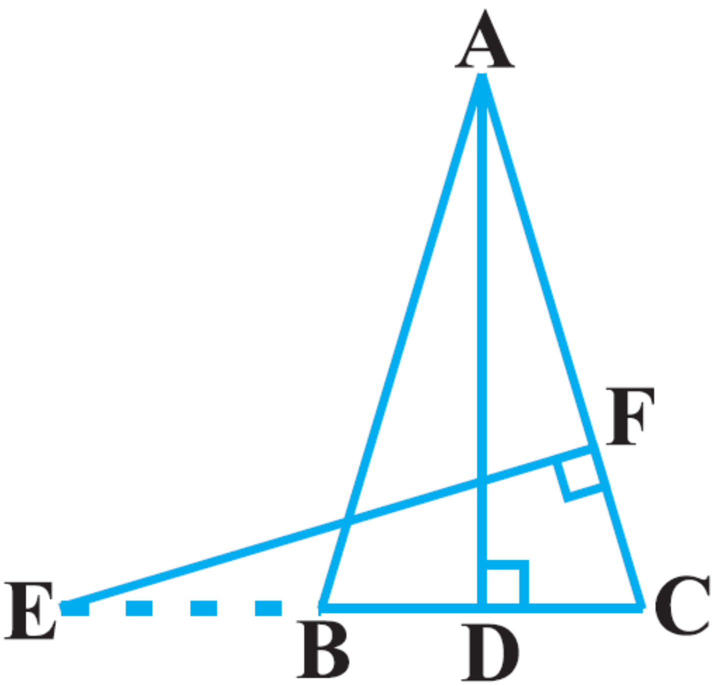
$\angle A = \angle F$ समी. (1) से

$\angle ACD = \angle FGH$ [चूँकि $\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$ समी. (3) से]

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle DCA \sim \triangle HGF$

प्रश्न 11 आकृति में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है तो सिद्ध कीजिए कि△ABD ~ △ECF है



उत्तर- दिया है: AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है

सिद्ध करना है:

$\triangle ABD \sim \triangle ECF$

प्रमाण:

$\triangle ABC$ में,

$AB = AC$ दिया है;

$\therefore \angle B = \angle C \ldots (1)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle EFC$ में

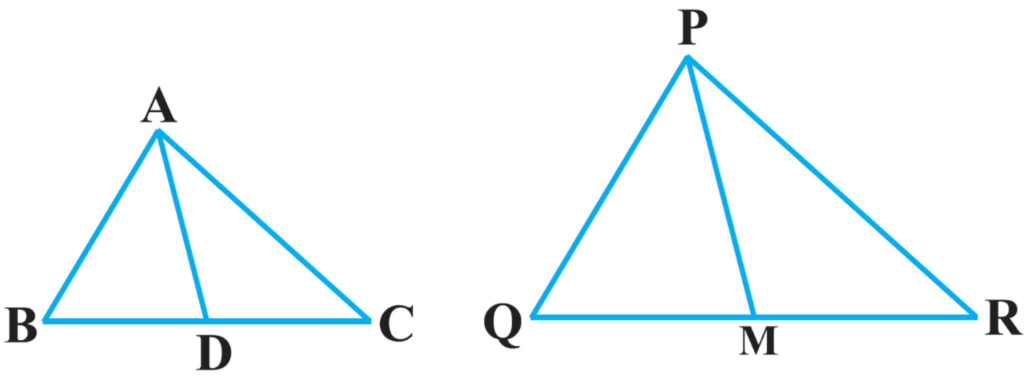
$\angle ADB = EFC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle B = \angle C$ समी. (1) से

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ABD \sim \triangle ECF$ इति सिद्ध

प्रश्न 12 एक त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति) दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।



उत्तर- दिया है: त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं।

सिद्ध करना है:

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

प्रमाण:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \ldots \text{दिया है}$$

अथवा $\frac{QAB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$

अथवा $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \ldots (1)$

(चूँकि माध्यिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$ समी. (1) से

S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \angle B = \angle Q \ldots (2)$$

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ दिया है

और $\angle B = \angle Q$ समी. (2) से

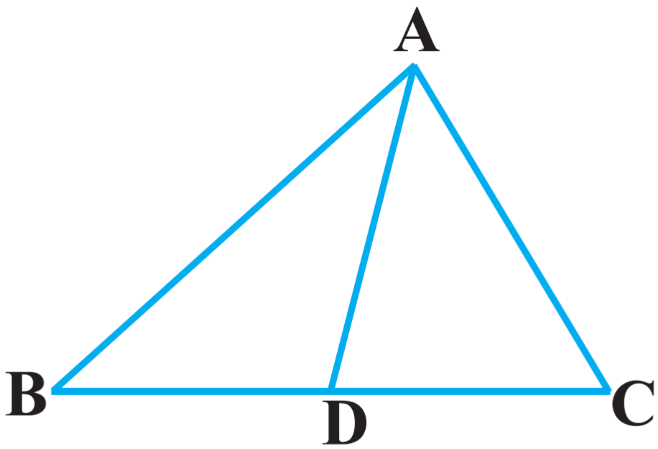
S.A.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

इति सिद्ध।

प्रश्न 13 एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि ∠ADC = ∠BAC है दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है

उत्तर-



दिया है: त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि ∠ADC = ∠BAC है।

सिद्ध करना है: $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CB.CD}$

प्रमाण:

अब, $\angle\mathrm{ADC}$ तथा $\triangle\mathrm{BAC}$ में

$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BAC}$ (दिया है)

$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C}$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

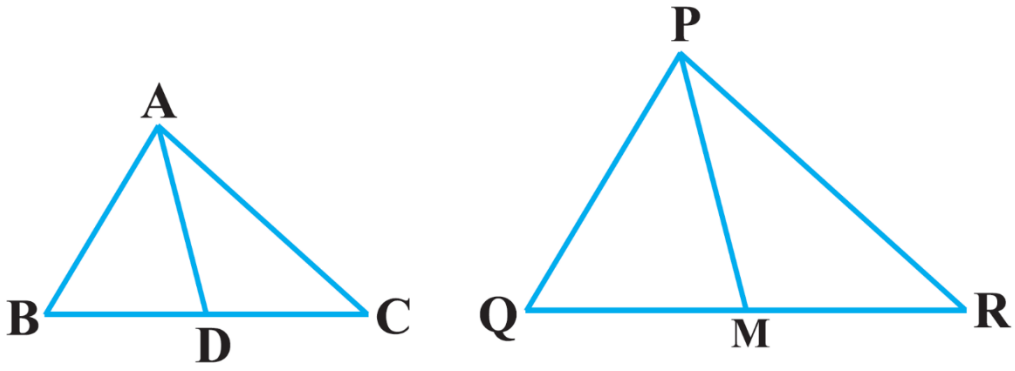
$\triangle\mathrm{ADC} \sim \triangle\mathrm{BAC}$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं ।)

या $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CB.CD}$ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)

इति सिद्ध

प्रश्न 14 एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AD}{PM}$ है और AD तथा PM मध्यिकाये है।

सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

प्रमाण:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \ldots (1) \text{ दिया है}$$

यहाँ माध्यिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माध्यिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है

$$\therefore \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR} \ldots (2)$$

समी. (1) तथा (2) से

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \ldots (3)$$

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$ समी. (3) से

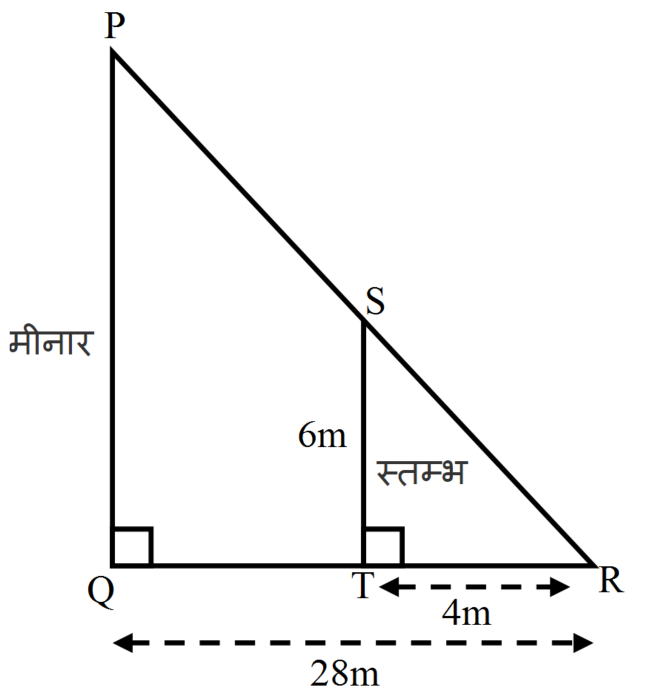
S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

इति सिद्ध।

प्रश्न 15 लंबाई 6m वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28m है मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए

उत्तर-



माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है। TR स्तम्भ की छाया है और QR मीनार की छाया है

$\triangle PQR$ तथा $\triangle STR$

$\angle PQR = \angle STR$ (प्रत्येक 90°)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle PQR \sim \triangle STR$

$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR}$ (समरूप त्रिभुज के सगत भुजाएं समानुपाती होती है)

$\frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$

$4PQ = 6 \times 28$

$PQ = \frac{6 \times 28}{4} = 42m$

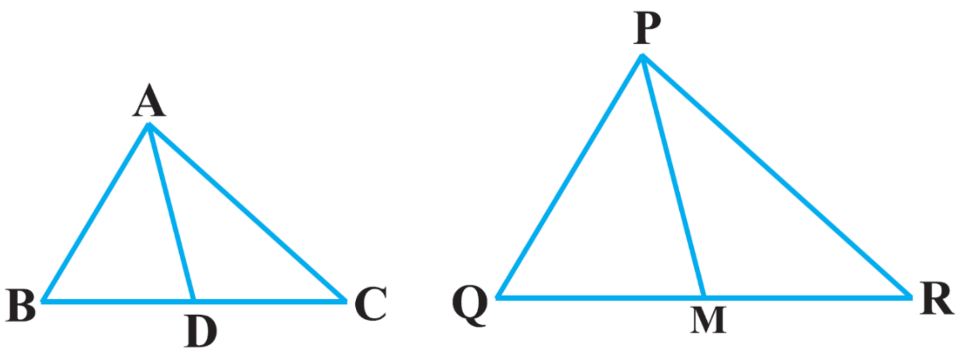
अतः मीनार की उचाई = 42m

प्रश्न 16 AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः महध्यिकाएँ है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

सिद्ध कीजिए की $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

उत्तर-



दिया है: AD और PM त्रिभुज ABC और PQR की क्रमश: मध्यिकाए है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

सिद्ध करना है: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \ldots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \ldots (2)$$

$\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \ldots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \ldots (2)$$

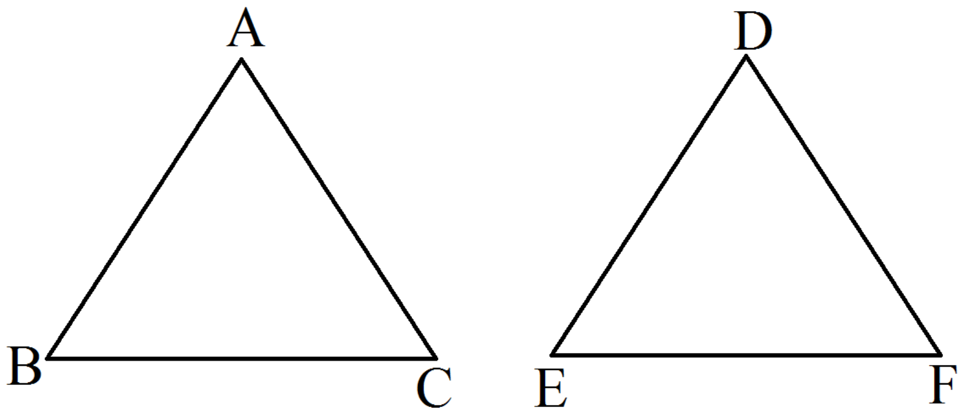
$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ इति सिद्धम।

प्रश्नावली 6.4 (पृष्ठ संख्या 158)

प्रश्न 1 मान लीजिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः $64cm^2$ और $121cm^2$ हैं यदि $EF = 15.4cm^2$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए

उत्तर-



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ दिया है

$\therefore$ प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{64}{121}} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)$$

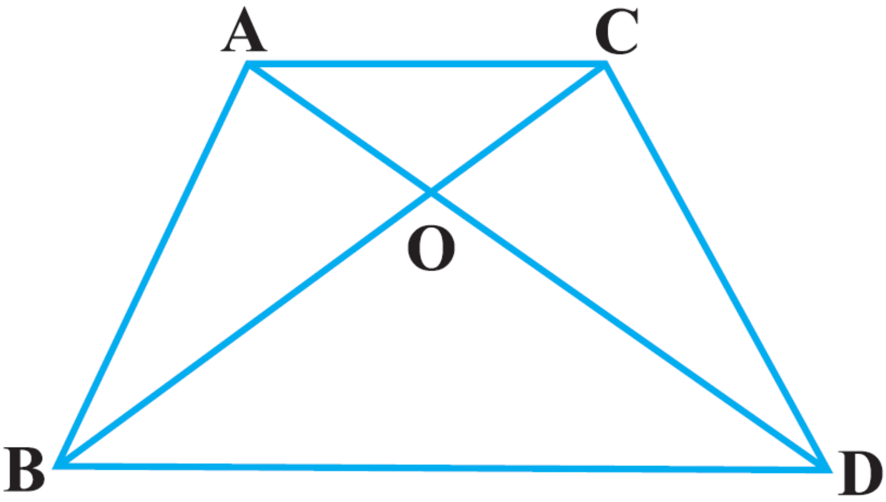
$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$11BC = 8 \times 15.4$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

प्रश्न 2 एक समलंब ABCD जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि AB = 2CD हो तो △AOB और △COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए



उत्तर- दिया है: ABCD एक समलंब है जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और AB = 2CD है

AB = 2CD (दिया है)

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1} \ldots (1)$$

अब, $AB \parallel DC$ (दिया है)

$\angle ABO = \angle CDO \ldots (2)$ एकांतर कोण

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$

$\angle AOB = \angle COD$ शीर्षभिमुख कोण

$\angle ABO = \angle CDO$ समीकरण ... (2)

A.A समरूपता कसौटी से

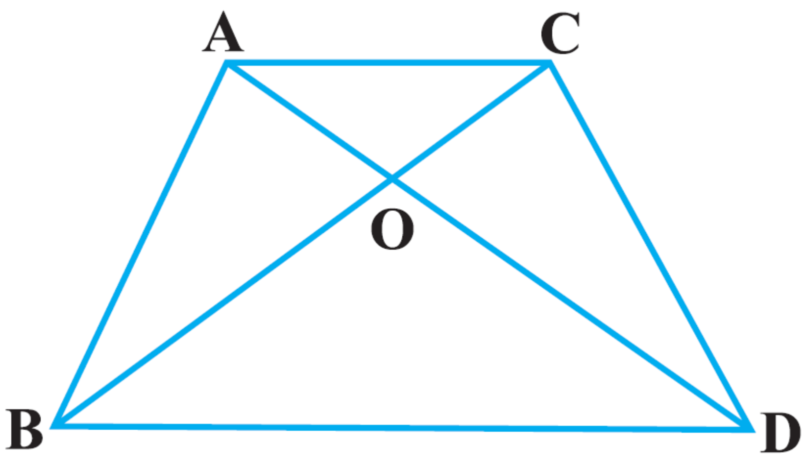
$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

अतः प्रमेय 6.6 से

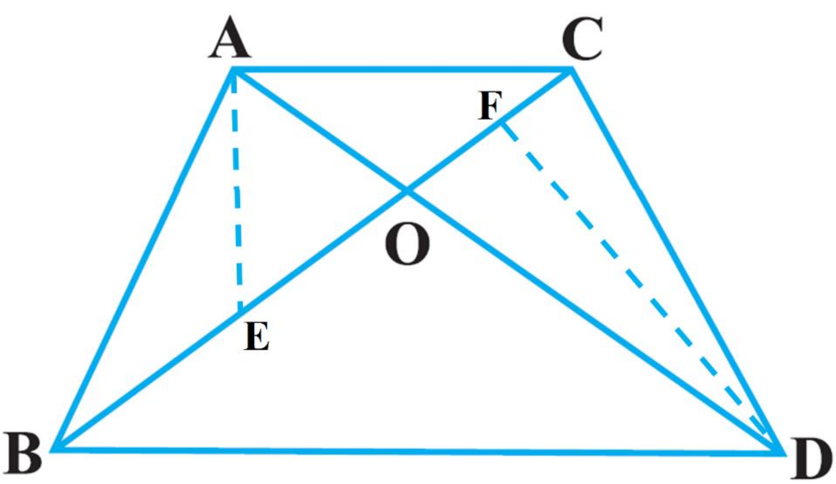
$$\frac{ar(AOB)}{ar(COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 1 है।

प्रश्न 3 आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं यदि AD, BC कोप O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए की $\frac{ae(ABC)}{ae(ABC)} = \frac{AO}{DO}$ है



उत्तर-



हमे प्राप्त है:

$\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक आधार BC पर स्थित है।

BC और AD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। $AE \perp BC$ और $DF \perp BC$ खींचो

अब, AOE में $\angle AEO = 90^\circ$ और

$\triangle DOF$ में, $\angle DFO = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AEO = \angle DFO \ldots (1)$

तथा $\angle AOE = \angle DOF$ [शीर्षाभिमुख कोण] ... (2)

(1) और (2), $\triangle AOB \sim \triangle DOF$

[AAA समरूपता कसौटी से]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती है।

$\Rightarrow \frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO} \ldots (3)$

अब $ar(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AE$

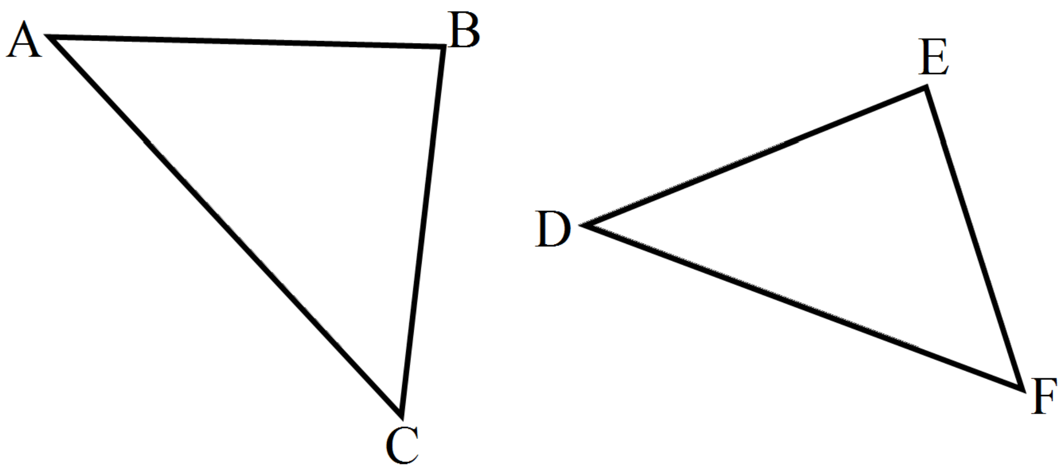
$ar(DBC) = \frac{1}{2} BC \times DF$

$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AE}{\frac{1}{2} \times BC \times DF} = \frac{AE}{DF}$

(3) और (4) से $\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DBC)} = \frac{AO}{OD} \ldots (4)$

प्रश्न 4 यदि दो समरूप तत्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वान्गसम होते हैं

उत्तर-



हमे प्राप्त है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ तथा $ar(\triangle ABC) = ar(\triangle DEF)$ चुकी समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलो का अनुपात उनकी संगत भुजाओं अनुपात वर्ग के बराबर होती है।

$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

परन्तु $ar(\triangle ABC) = ar(\triangle DEF)$ [ज्ञात है।]

$$\Rightarrow \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = 1 \Rightarrow AB = DE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = 1 \Rightarrow BC = EF$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DF} = 1 \Rightarrow Ac = DF$$

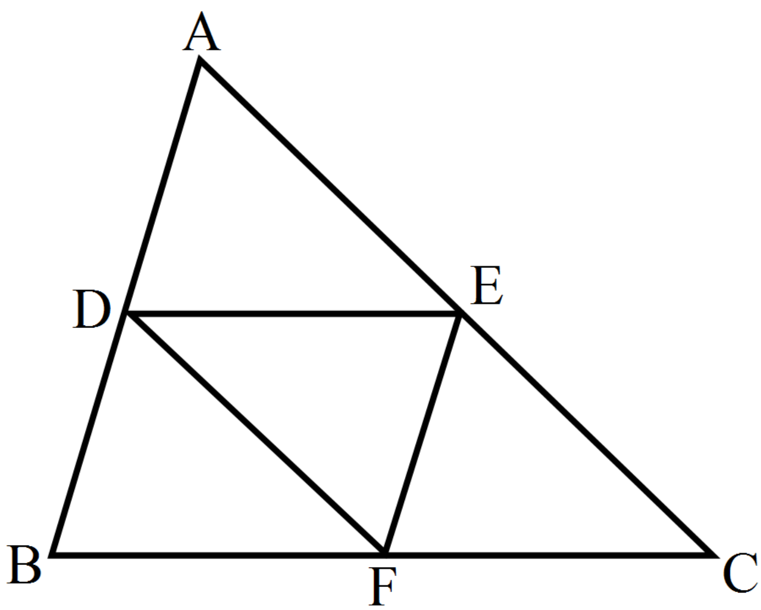
अर्थात $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ की संगत भुजाए समान है।

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong DEF$$

[AAA सर्वांगसमता की कसौटी से]

प्रश्न 5 एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB,BC और CA के मध्य-बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं त्रिभुज DEF और त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \ldots (1)$$

इसी प्रकार, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \ldots (2)$

(1) और (2) से हमे प्राप्त होता है:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

थेल्स प्रमेय के विलोम का प्रयोग करके हम कह सकते है की $\mathrm{DE} \| \mathrm{BC}$

$\Rightarrow \angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ABC}$ [संगत कोण] ... (3)

और $\angle \mathrm{AED} = \angle \mathrm{ACD}$ [संगत कोण] ... (4)

(3) और (4) से हमे प्राप्त होता है:

$$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DEF}$$

[AAA समरूपता की कसौटी से]

$$\therefore \frac{\mathrm{ar}(\triangle \mathrm{DEF})}{\mathrm{ae}(\triangle \mathrm{ABC})} = \frac{(\mathrm{DE})^2}{(\mathrm{BC})^2} = \left(\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}\right)^2 \ldots (5)$$

[$\because$समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है]

परन्तु DE, A ABC की भुजाओं AB और AC के क्रमशः मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा है

$$\therefore \mathrm{DE} = \tfrac{1}{2}\mathrm{BC} \ldots (6)$$

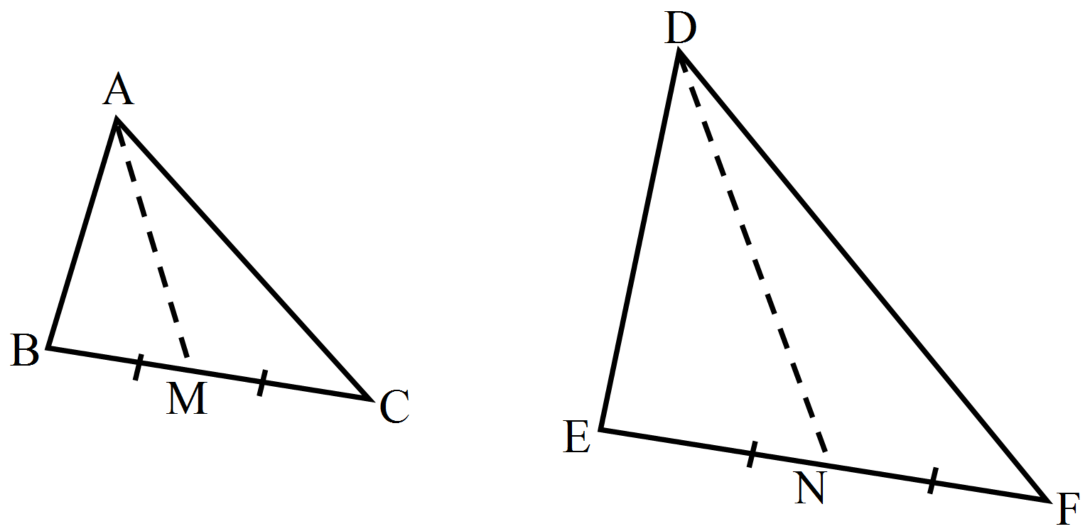
(5) और (6) से हमे प्राप्त होता है:

$$\frac{\mathrm{ar}(\triangle \mathrm{DEF})}{\mathrm{ar}(\triangle \mathrm{ABC})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\mathrm{BC}\right)^2}{(\mathrm{BC})^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ar}(\triangle \mathrm{ABC}) : \mathrm{ar}(\triangle \mathrm{ABC}) = 1 : 4$$

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

उत्तर-



$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \ldots (1)$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \ldots (2)$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2MB}{2EN} = \frac{BM}{EN} \ldots (3)$$

$\triangle ABM$ और $\triangle DEN$ में हमे प्राप्त है।

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

$$\angle B = \angle E$$

[समरूप $\triangle$ के संगत कोण]

$\therefore$ SSS सर्वांगसमता की कसौटी से

$$\triangle ABM \sim \triangle DEN$$

$\Rightarrow$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

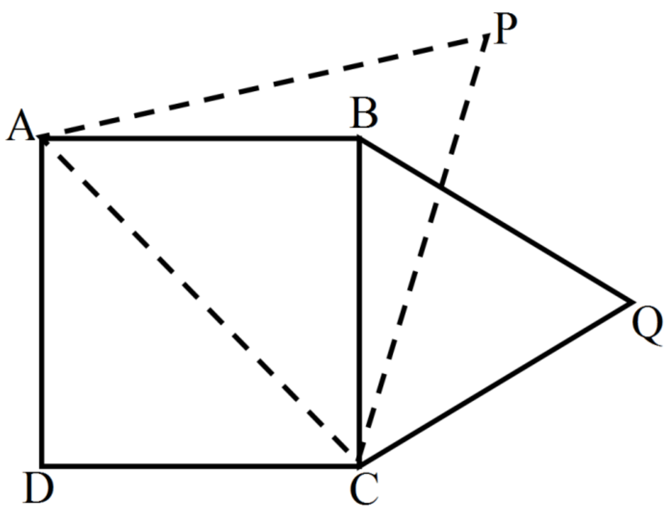
$$\therefore \frac{AB}{DM} = \frac{BM}{EN} = \frac{AM}{DN} \ldots (4)$$

अब (1) और (4) से हमे प्राप्त होता है।

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2$$

प्रश्न 7 कीजिए कि दो एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है

उत्तर-



$$\therefore \triangle APC \sim \triangle BQC$$

$\therefore$ इनके क्षेत्रफलो का अनुपात संगत भुजाओ के वर्गो के समान है।

$$\text{i.e.,} \frac{ar(\triangle APC)}{ar(\triangle BQC)} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \ldots (1)$$

चुकी एक वर्ग के विकरण की लम्बाई $= \sqrt{2} \times$ भुजा

$$\therefore AC = \sqrt{2} \times BC \ldots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{ar(\triangle APC)}{ar(\triangle BQC)} = \left(\frac{\sqrt{2}BC}{BC}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

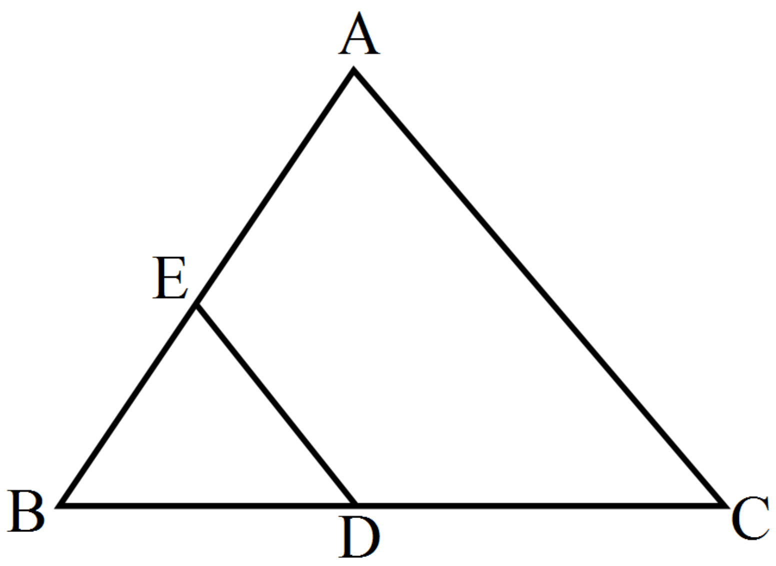
$$\Rightarrow ar(\triangle BQC) = \frac{1}{2}ar(\triangle APC)$$

प्रश्न 8 ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कोई भुजद BC का मध्य-बिन्दु है त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

a. 2 : 1
b. 1 : 2
c. 4 : 1
d. 1 : 4

उत्तर-

c. 4 : 1



चूंकि सभी समबाहु त्रिभुजें समरूप होती हैं।

$$\triangle ABC \sim \triangle BDE$$

इनके क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle BDE)} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 \ldots (1)$$

$$\because AB = AC = BC$$

[समबाहु $\triangle ABC$ की भुजाए]

और $BD = \frac{1}{2} BC$

[BC का मध्य बिंदु D है]

$$\Rightarrow BC = 2BD = AB \ldots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle BDE)} = \left(\frac{2BD}{BD}\right) = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1}$$

$$\therefore ar(\triangle ABC) : ar(\triangle BDE) = 4 : 1$$

प्रश्न 9 दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

a. 2 : 3
b. 4 : 9
c. 81 : 16
d. 16 : 81

उत्तर-

d. 16 : 81

$$\therefore \quad \frac{\text{क्षेत्रफल - }(\Delta - \text{I})}{\text{क्षेत्रफल - }(\Delta - \text{II})} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

⇒ क्षेत्रफल (△–I) क्षेत्रफल (△–II) = 16 : 81

प्रश्नावली 6.5 (पृष्ठ संख्या 164-166)

प्रश्न 1 कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7cm, 24cm, 25cm

(ii) 3cm, 8cm, 6cm

(iii) 50cm, 80cm, 100cm

(iv) 13cm, 12cm, 5cm

उत्तर-

(i) कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$25^2 = 7^2 + 24^2$

625 = 49 + 576

625 = 625

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है।

अत: कर्ण = 25cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

(ii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$8^2 = 3^2 + 6^2$

$64 = 9 + 36$

$64 = 45$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं है।

(iii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$100^2 = 50^2 + 80^2$

$10000 = 2500 + 6400$

$10000 = 8900$

(iv) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$169 = 25 + 144$

$169 = 169$

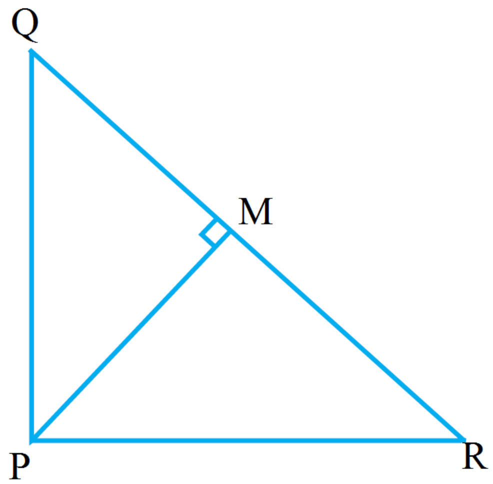
चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है।

अत: कर्ण = 13cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

प्रश्न 2 PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि PM ⊥ QR है दर्शाइए कि PM^2 = QM.MR है।

उत्तर-



दिया है: PQR एक समकोण त्रिभुज है

जिसका कोण P समकोण है तथा QR

पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $\mathrm{PM} \perp \mathrm{QR}$ है

सिद्ध करना है: $\mathrm{PM}^2 = \mathrm{QM}.\mathrm{MR}$

प्रमाण: $\mathrm{PM} \perp \mathrm{QR}$ दिया है

इसलिए प्रमेय 6.7 से

$$\triangle \mathrm{PMQ} \sim \triangle \mathrm{PRQ} \ldots (1)$$

इसी प्रकार,

$$\triangle \mathrm{PMQ} \sim \triangle \mathrm{PRQ} \ldots (1)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

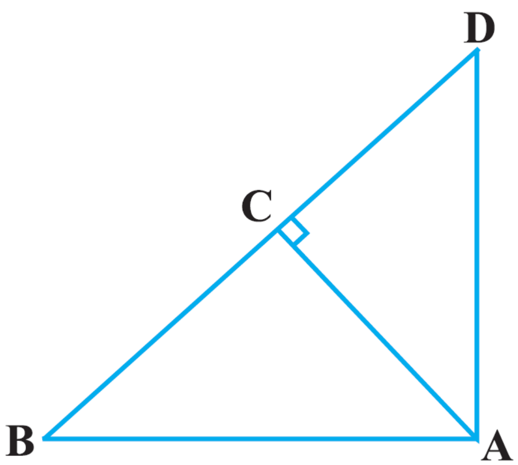
$$\triangle PMQ \sim \triangle PMR$$

अतः $\dfrac{PM}{QM} = \dfrac{MR}{PM}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

$$\therefore PM^2 = QM.\ MR$$

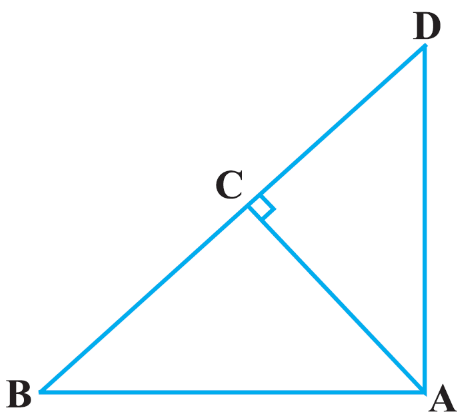
प्रश्न 3 आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है दर्शाइए कि:

a. $AB^2 = BC.BD$
b. $AC^2 = BC.DC$
c. $AD^2 = BD.CD$



उत्तर- ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है

सिद्ध करना है:



1. AB^2 = BC.BD
2. AC^2 = BC.DC
3. AD^2 = BD.CD

प्रमाण: (1) ABD एक समकोण त्रिभुज है और $AC \perp BD$ दिया है

1. $\triangle AB^2 \sim \triangle ABD$ प्रमेय

   अतः $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

   $\therefore AB^2 = BC.BD$ इति सिद्धम।

2. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

   अतः $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

   $\therefore AC^2 = BC.DC$ इति सिद्धम।

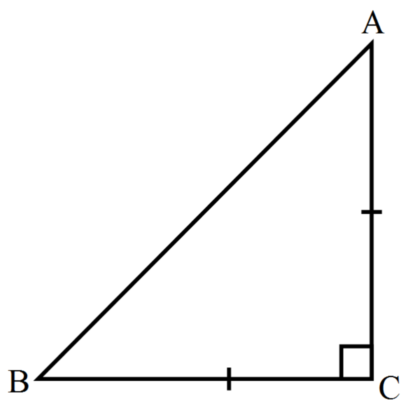
3. $\triangle ACD \sim \triangle ABD$

   अतः $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

   $\therefore AD^2 = BC.CD$ इति सिद्धम।

प्रश्न 4 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है सिद्ध कीजिए कि AB^2 = $2AC^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसका कोण C समकोण है

सिद्ध करना है: $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

$AC = BC \ldots (1)$

और ABC एक समकोण त्रिभुज है

पाइथागोरस प्रमेय से

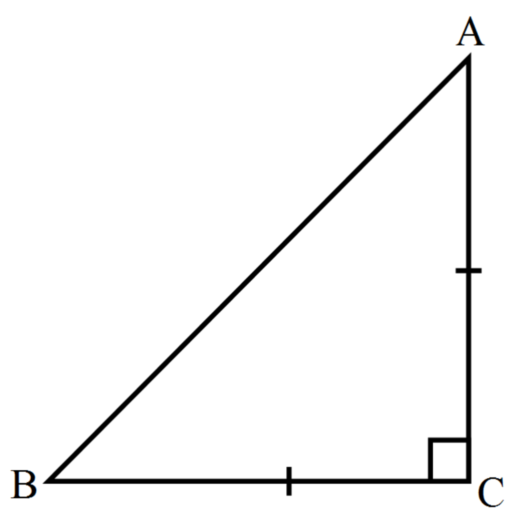
$AB^2 = BC^2 + AC^2$

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$ (समी. 1 से)

अथवा $AB^2 = 2AC^2$ इति सिद्धम।

प्रश्न 5 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AC = BC है यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

जिसमें AC = BC है और $AB^2 = 2AC^2$ है।

सिद्ध करना है: ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रमाण: AC = BC ..... (1) दिया है।

और $AB^2 = 2AC^2$ ..... (दिया है।)

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$

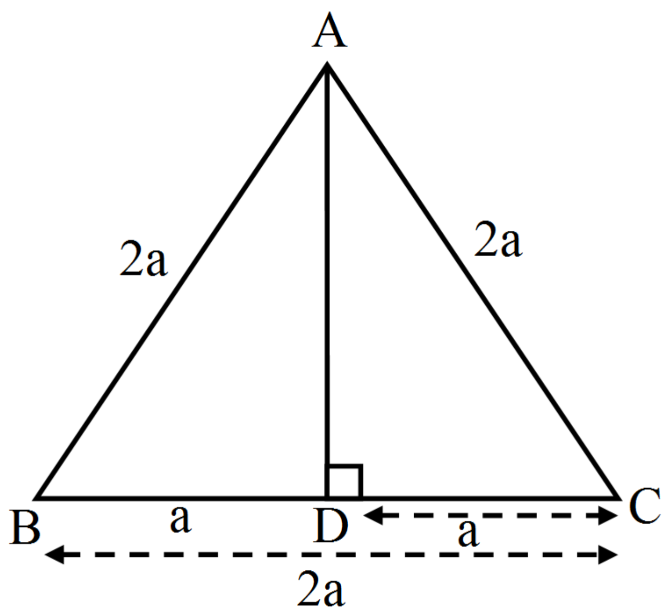
अथवा $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (समी. 1 से)

अत: पाइथागोरस प्रमेय के विलोम (प्रमेय 6.9) से

ABC एक समकोण त्रिभुज है। इति सिद्धम।

प्रश्न 6 एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है

AB = BC = AC = 2a

रचना: AD ⊥ BC डाला

अत: समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2$$

$$(2\mathrm{a}) = \mathrm{AD}^2 + (\mathrm{a})^2$$

$$4\mathrm{a}^2 = \mathrm{AD} + \mathrm{a}^2$$

$$\mathrm{AD}^2 = 4\mathrm{a}^2 - \mathrm{a}^2$$

$$\mathrm{AD}^2 = 3\mathrm{a}^2$$

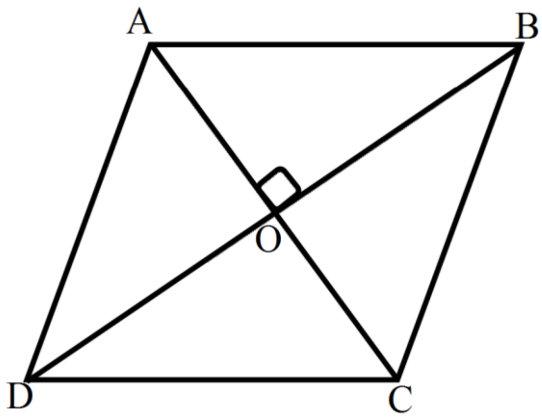
$$\mathrm{AD} = \sqrt{3\mathrm{a}^2}$$

$$\mathrm{AD} = \alpha\sqrt{3}$$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई $\alpha\sqrt{3}$

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी

भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD है और विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है: $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$

प्रमाण: समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं इसलिए,

समकोण $\triangle \mathrm{AOB}$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AO}^2+\mathrm{BO}^2 \ldots(1)$$

इसी प्रकार $\triangle \mathrm{BOC}$, $\triangle \mathrm{COD}$ और $\triangle \mathrm{AOB}$ में,

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CO}^2+\mathrm{BO}^2 \ldots(2)$$

$$\mathrm{CD}^2=\mathrm{CO}^2+\mathrm{DO}^2 \ldots(3)$$

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AO}^2+\mathrm{DO}^2 \ldots(4)$$

समी. (1), (2), (3) और (4) जोड़ने पर

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2$$

$$= AO^2 + BO^2 + CO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + AO^2 + DO^2$$

$$= 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

$$= 2\left[\left(\tfrac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}AC\right) + \left(\tfrac{1}{2}BD\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{4}AC^2 + \tfrac{1}{4}BD^2 + \tfrac{1}{4}AC^2 + \tfrac{1}{2}BD^2\right]$$

$$= 2 \times \tfrac{1}{4}[AC^2 + BD^2 + AC^2 + BD^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}[2AC^2 + 2BD^2]$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 2[AC^2 + BD^2]$$

$$= AC^2 + BD^2$$

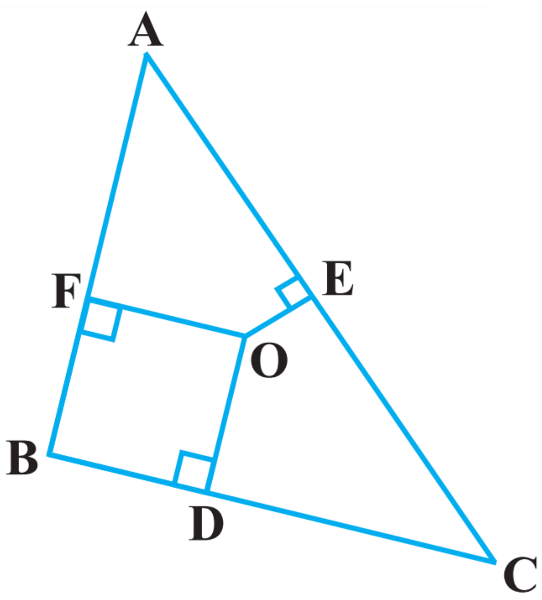
$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$ इति सिद्धम।

प्रश्न 8 आकृति में $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है

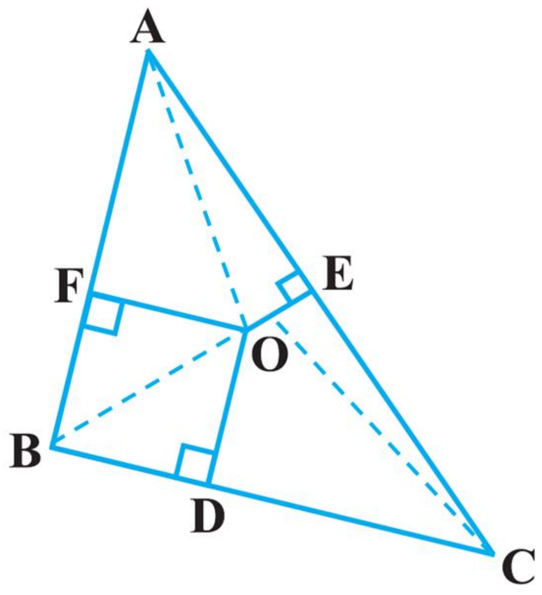
दर्शाइए कि,

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF$



उत्तर-



दिया है: $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है।

सिद्ध करना है:

1. $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
2. $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रमाण:

समकोण $\triangle AOF$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = AF^2 + OF^2$ .....(i)

समकोण $\triangle BOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OB^2 = BD^2 + OD^2$ .....(II)

समकोण ΔCOE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OC^2 = CE^2 + OE^2$ .....(III)

समीकरण (I), (II) तथा (III) को जोड़ने पर

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$ इति सिद्धम।

अब, पुन:

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

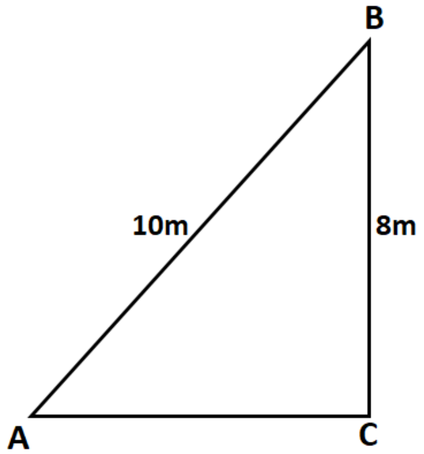
या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2)$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ पाइथागोरस प्रमेय से

प्रश्न 9 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



AB एक 10m लम्बी सीढ़ी है जिसे दीवार BC पर टिकाया गया है। दीवार पर स्थित खिड़की B दीवार पर उसके आधार से 8m की ऊँचाई तक जाती है। सीढ़ी का निचला सिरा A दीवार के आधार C से AC की दूरी पर है।

अब समकोण ΔBCA में, $\angle C = 90°$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$AC^2 = (10)^2 - (8)^2$

$= 100 - 64$

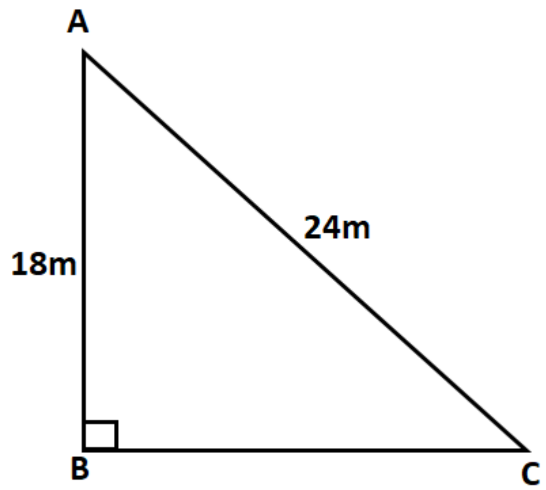
$= 36$

$AC^2 = \sqrt{36} = 6$ m

अतः सीढ़ी के निचले सिरे की दीवार के आधार से अभीष्ट दूरी = 6 m है।

प्रश्न 10 18m ऊंचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूटे को कितनी दूरी पर गाडा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है।

उत्तर-



एक ऊर्ध्वाधर खम्भा AB = 18 m है जो सिरे A से एक तार AC = 24 m से एक खूटे C से जुड़ा है। खम्भे के आधार B से खूटे C की दूरी BC है।

अब समकोण ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से, चूँकि

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$BC^2 = (24)^2 - (18)^2$

$BC^2 = 576 - 324$

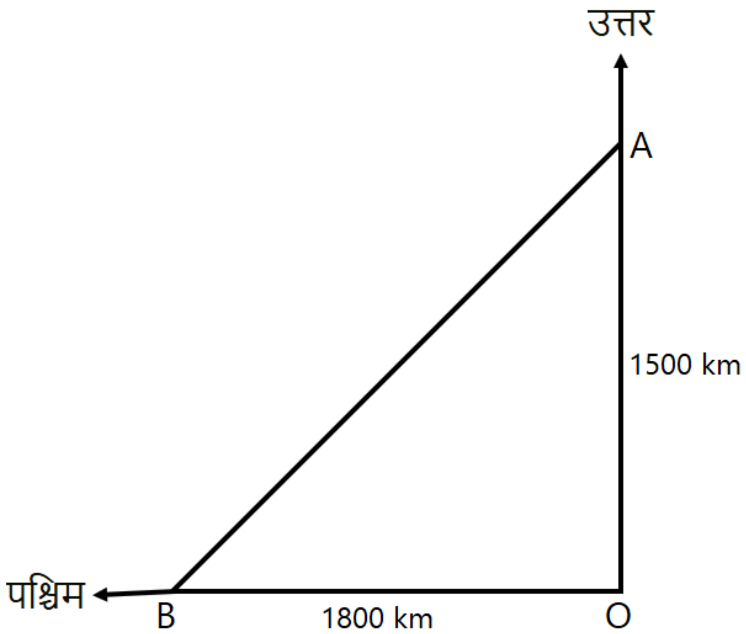
$= 252$

$BC = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$ m

अतः खूटे की खम्भे के आधार से अभीष्ट दूरी = $6\sqrt{7}$ m.

प्रश्न 11 एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/ hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/ hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

उत्तर-



पहले हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$, घण्टे में उत्तर की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1000 = 1500km$ तथा

दूसरे हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घण्टे में पश्चिम की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1200 = 1800$ km जहाज A और B की स्थिति $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दूरी की संलग्न आकृति में प्रदर्शित की गई है तथा उनके बीच की दूरी AB है।

चूँकि समकोण त्रिभुज AOB में ∠AOB समकोण है।

$AB^2 = (AO)^2 + (BO)^2$

पाइथागोरस प्रमेय से]

$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2$

$= 2250000 + 3240000$

$= 5490000$

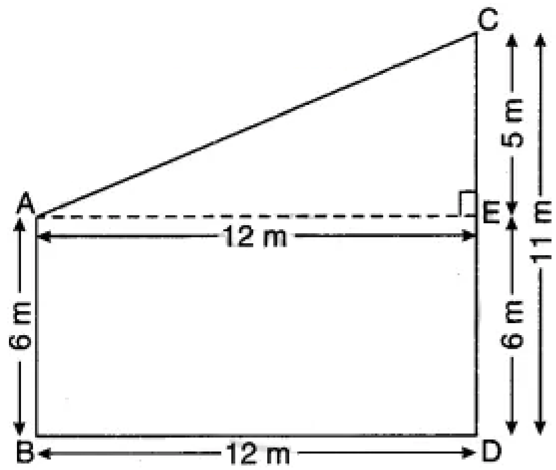
$AB = \sqrt{5490000} = \sqrt{90000 \times 61}$

$= 300\sqrt{61}$ km

अतः दोनों हवाई जहाजों के बीच की अभीष्ट दूरी $= 300\sqrt{61}$ km है।

प्रश्न 12 दो खंभे जिनकी ऊँचाईयाँ 6m और 11m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके पाद बिंदुओं के बीच की दूरी 12m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दो खंभे AB = 6m एवं CD = 11m समतल भूमि पर दूरी BD = 12m पर स्थित है उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी AC है। (देखिए संलग्न आकृति) E से $AE \perp CD$ खींचिए।

अब समकोण ΔAEC में,

भुजा AE = BD = 12 m एवं ED = AB = 6 m

एवं CD = 11 m

CE = CD – ED

= 11 m – 6 m

= 5m

अब समकोण ΔAEC में (जहाँ $\angle AEC = 90°$),

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$AC^2 = (12)^2 + (5)^2$

= 144 + 25

= 169

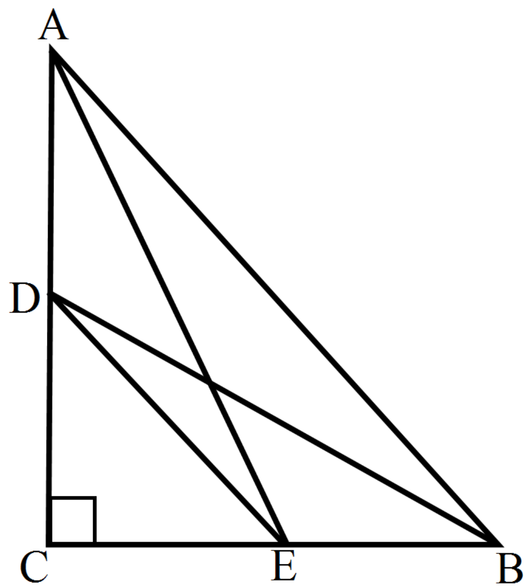
$AC = \sqrt{169} = 13m$

अतः खम्भों के ऊपरी सिरे के बीच की अभीष्ट दूरी = 13m है।

प्रश्न 13 किसी त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमश: बिंदु D औए E स्थित है

सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है

उत्तर-



दिया है: त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है की भुजाओ CA और CB पर क्रमश: बिंदु D और स्थित है।

सिद्ध करना है:

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

रचना: D को E से मिलाया

प्रमाण: समकोण $\triangle ACE$ में पाईथागोरस प्रमेय से

$AE^2 = AC^2 + CE^2$ .....(1)

इसीप्रकार,

समकोण $\triangle BCD$ में, पाईथागोरस प्रमेय से

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2$

$AE^2 + BD^2 = (AC^2 + BC^2) + (CE^2 + CD^2)$

AE2 + BD2 = AB2 + DE2

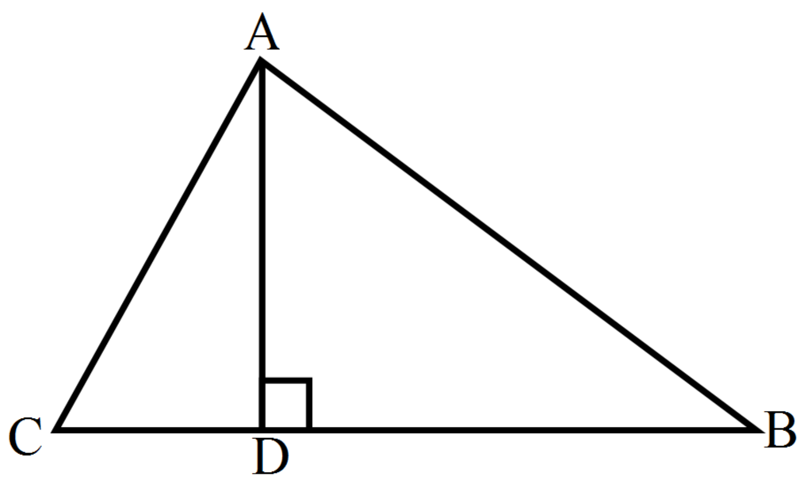
पाईथागोरस प्रमेय से,

$[\because AB^2 = AC^2 + BC^2$ और $DE^2 = CE^2 + CD^2]$

प्रश्न 14 किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लंब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3CD है

सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है

उत्तर-



दिया है: ABC का त्रिभुज है जिससे $AD \perp BC$ है तथा $DB = 3CD$ है।

सिद्ध करना है:

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

प्रमाण:

$$CD = BC - BD$$

$$CD = BC - 3CD$$

$$4CD = BC$$

$$CD = \frac{BC}{4} \ldots (1)$$

$DB = 3CD$ दिया है।

$$DB = \frac{3BC}{4} \ldots (2)$$

समकोण $\triangle ACD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AD^2 = AC^2 - CD \ldots (3)$$

समकोण $\triangle ABD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{16} + \frac{9BC^2}{16}$$

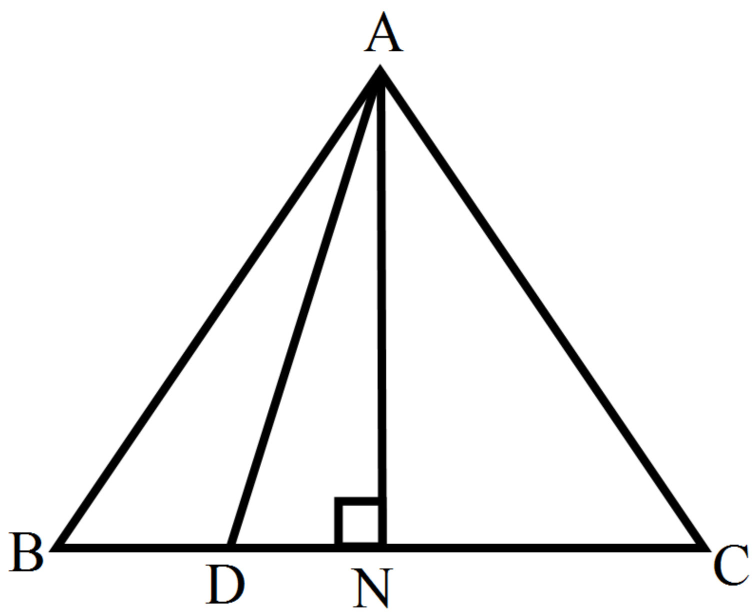
$$AB^2 = AC^2 + \frac{8BC^2}{16}$$

$$AB^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ इति सिद्धम।

प्रश्न 15 किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है की BD = $\frac{1}{3}$BC है। सिद्ध कीजिए की $9AD^2 = 7AB^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमे $\mathrm{BD} = \frac{1}{3} = \mathrm{BC}$ है।

सिद्ध करना है: $9\mathrm{AD}^2 = 7\mathrm{AB}^2$

रचना: $\mathrm{AN} \perp \mathrm{BC}$ खींचा।

प्रमाण:

$\mathrm{BD} = \frac{1}{3}\mathrm{BC} \ldots (1)$ दिया है।

$$\mathrm{BN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\ [\because \mathrm{AN} \perp \mathrm{BC}] \ldots (2)$$

$$\mathrm{DN} = \mathrm{BN} - \mathrm{BD}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{BC} - \frac{1}{3}\mathrm{BC}$$

$$= \frac{3\mathrm{BC} - 2\mathrm{BC}}{6} = \frac{\mathrm{BC}}{6}$$

समकोण $\triangle \mathrm{ADN}$ में पाईथागोरस प्रमेय से,

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AN}^2 + \mathrm{BN}^2$$

$\mathrm{AB}^2 = (\mathrm{AD}^2 - \mathrm{DN}^2) + \mathrm{BN}^2$ समी. (1) से

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 = \left(\frac{\mathrm{BC}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{BC}}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 - \frac{\mathrm{BC}^2}{36} + \frac{\mathrm{BC}^2}{4}$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2+9BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{8BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{2BC^2}{9}$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2BC^2$$

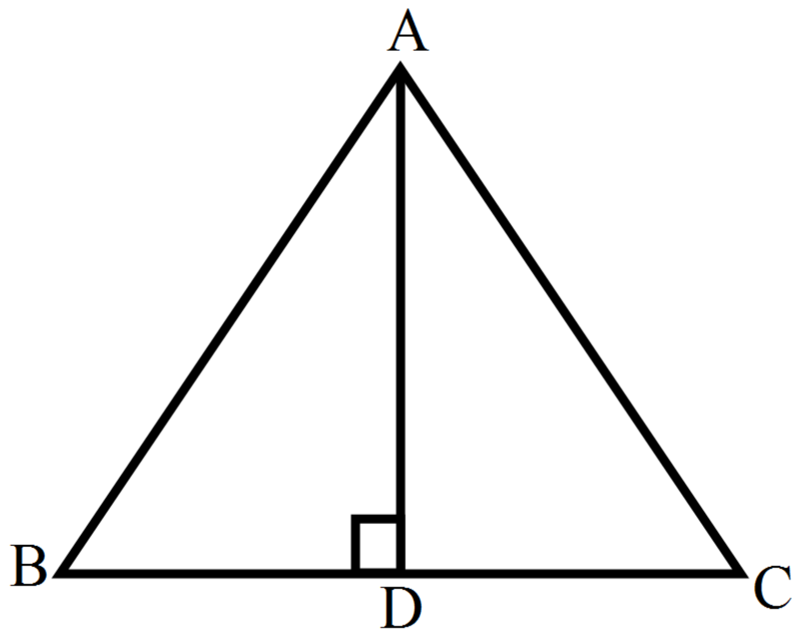
$$9AB^2 = 9AD^2 + 2AB^2$$

$$9AB^2 - 2AB^2 = 9AD^2$$

$$7AB^2 = 9AD^2$$

प्रश्न 16 किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमे $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना है: $3AB^2 = 4AD^2$

प्रमाण: समकोण त्रिभुज ABD में पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 [\because DB = \tfrac{1}{2}BC]$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + AB^2 [\because AB = BC]$$

$$4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$$

$$3AB^2 = 4AD^2$$

प्रश्न 17 सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए $\triangle ABC$ में AB = $6\sqrt{3}$ cm, AC = 12cm और BC = 6cm है कोण B है।

a. 120°
b. 60°
c. 90°
d. 45°

उत्तर-

c. 90°

सही उत्तर 90° है, क्योंकि

$(AB)^2 = (6\sqrt{3})2 = 108$

$(AC)^2 = (12)^2 = 144$

$(BC)^2 = (6)^2 = 36$

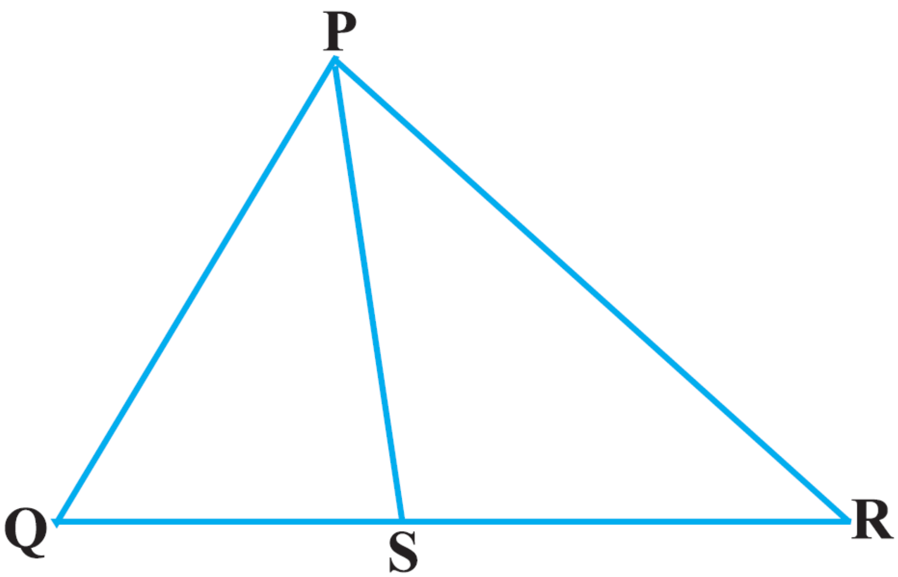
$\Rightarrow 108 + 36 = 144$

$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

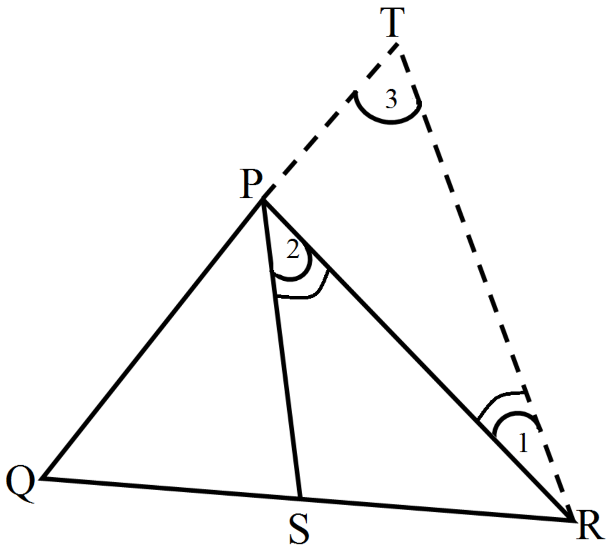
$\Rightarrow \angle B = 90°$ समकोण ....[पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा]

प्रश्नावली 6.6 (पृष्ठ संख्या 166-168)

प्रश्न 1 आकृति में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।s



उत्तर-



हमे प्राप्त है: $\triangle PQR$ जिसमे $\triangle QPR$ का समद्विभाजक PS है।

$\therefore \angle QPS = \angle RPS$

रचना: $RT \parallel RS$ खींचो जो QP (बढ़ाए जाने पर) को T पर प्रतिच्छेदक करे।

$\angle 1 = \angle RPS$ [एकांतर कोण]

$\angle 3 = \angle QPS$ [संगत कोण]

$\angle RPS = \angle QPS$ [ज्ञात है]

$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow PT = PR$

[$\because$ किसी $\triangle$ के समान कोणो की सम्मुख भुजाए समान होती है।]

अब $\triangle QRT$ में $PR \parallel RT$ [रचना द्वारा]

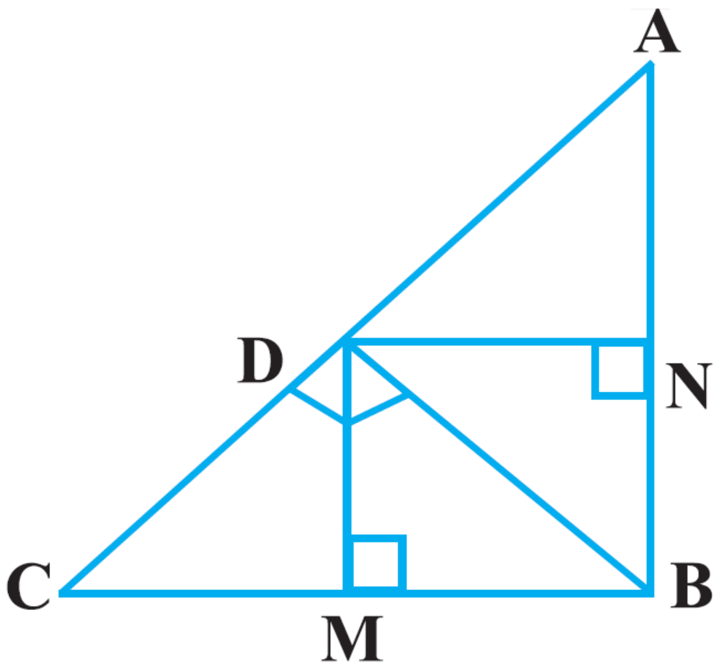
$\therefore$ मूलभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से हमे प्राप्त होती है।

$$\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PT} \Rightarrow \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR} [\because PT = PR]$$

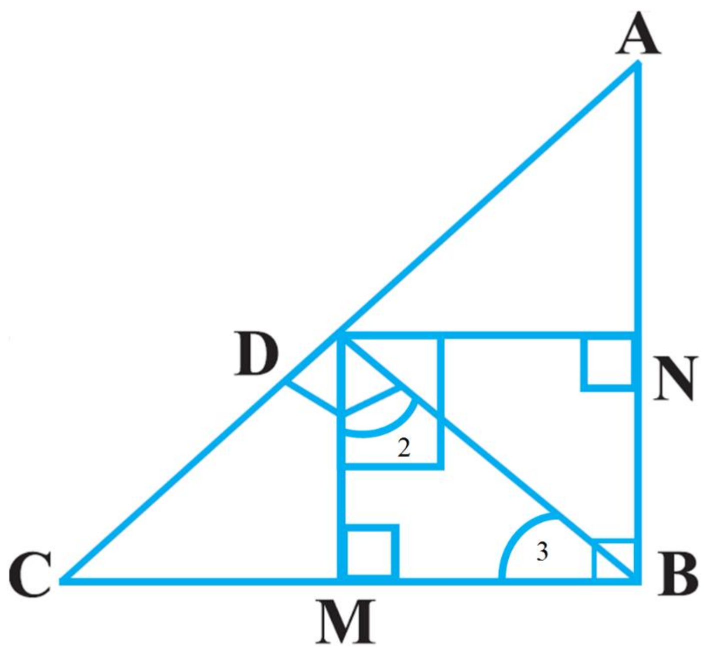
प्रश्न 2 आकृति में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा DM | BC और DN | AB है| सिद्ध कीजिए कि:

(i) $DM^2 = DN.MC$

(ii) $DN^2 = DM.AN$



उत्तर-



हमे प्राप्त है: की त्रिभुज ABC में AC विकर्ण है तथा $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$.

$\Rightarrow$ BMBN आयत है।

$\therefore BM = ND$ [आयत की सम्मुख भुजाए]

1. $\triangle BMD$ और $\triangle DMC$ में,

$\angle DMB = 90^\circ = \angle DMC \ldots (1)$

$\because BD \perp AC$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\triangle BDM, \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \ldots (2)$

(1) और (2) से,

$\triangle BMD \sim \triangle DMC$ [AA समरूपता से]

$\therefore$ इनकी भुजाए है।

$$\Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{DM}{MC}$$

[$\because$ DN और BM, आयत की सम्मुख भुजाए है]

$\therefore DN = BM$

$\Rightarrow DN \times MC = DM \times DM$

$\Rightarrow DN \times MC = DM^2$

$DM^2 = DN \times MC$

2. $\triangle BND$ और $\triangle DNA$, हमे प्राप्त है।

$\angle BND = \angle DNA$ [प्रत्येक 90°]

$\angle DBN = \angle ADN$ [(1) में सिद्ध किया है]

$\Rightarrow \triangle BND \sim \triangle DNA$ [AA समरूपता]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{BN}{DN} = \frac{ND}{NA}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{DN}{NA}$$

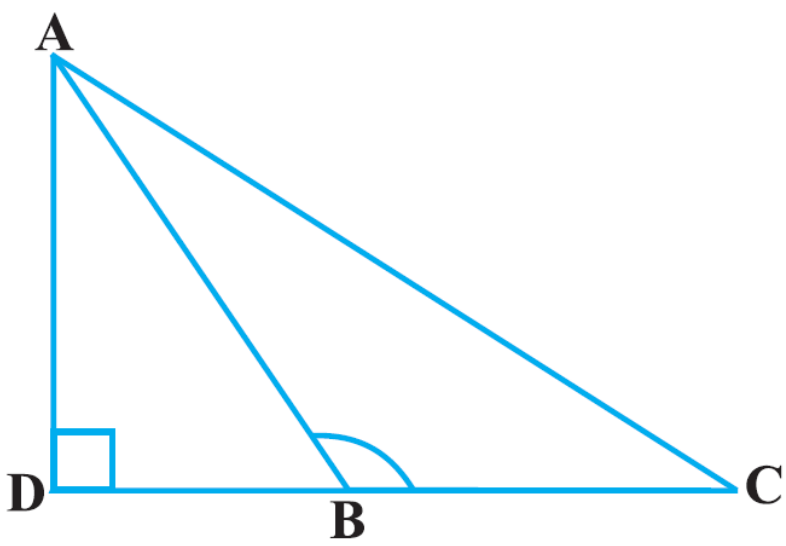
[$\because$ BN और DM, आयत की सम्मुख भुजाए है]

$$\Rightarrow DM \times NA = N \times DN$$

$$\Rightarrow DM \times NA = DN^2$$

$$DN^2 = DM \times AN$$

प्रश्न 3 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें angle ABC > 90° हा तथा AD | CB है सिद्ध कीजिए की $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है



उत्तर-

$\triangle ABC$ रक समकोण त्रिभुज है जिसमे $\angle ABC > 90^\circ$ और $AD \perp CB$

$\because \triangle ADB$ में, $\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \,..\, (1)$$

पुनः $\triangle ADC$

$$\angle D = 90^\circ$$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$= AD^2 + [BD + BC]^2$$

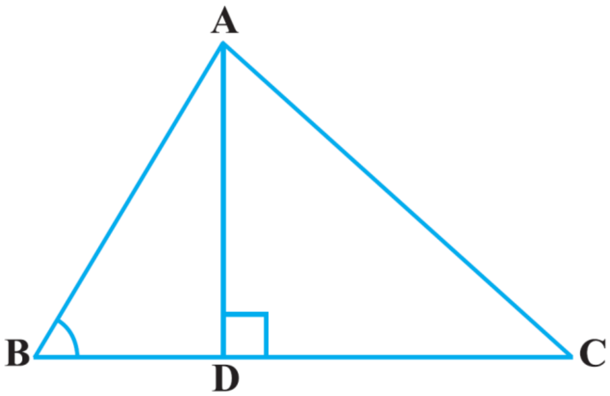
$$= AD^2 + [BD^2 + BC^2 + 2BD.BC$$

$$\Rightarrow AC^2 = [AD^2 + DB^2 + 2BC.BD[(1)]$$

हमे प्राप्त होता है।

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$$

प्रश्न 4 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें ABC < 90° है तथा AD | BC है सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BD$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में $\triangle ABC < 90^\circ$ और $AD \perp BC$ समकोण $\triangle ADB$ में, $\triangle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \ldots (1)$

तथा समकोण $\triangle ADC$ में $\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमे मिलता है।

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + [BC - BD]^2$$

$$= AD^2 + [BC^2 + BD^2 - 2BC.BD]$$

$$= [AD^2 + BD^2] + BC^2 - 2BC.BD$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2BC.BD \ldots (1) \text{ से,}$$

इस प्रकार,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$$

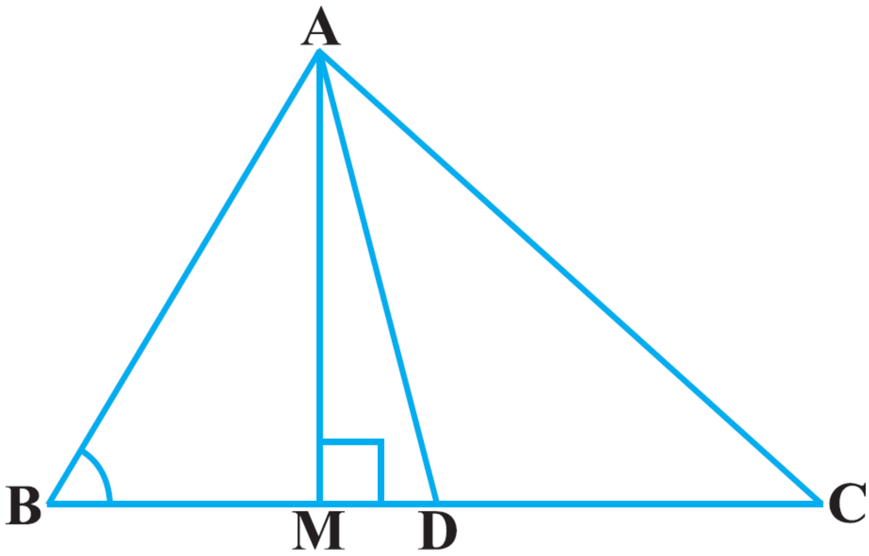
जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 5 आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा AM | BC है सिद्ध कीजिए की:

1. $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

2. $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

3. $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{BC}^2$



उत्तर-

1. $= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MD.\frac{BC}{2}$

[∵ BC की मध्यबिंदु D]

$= AD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BC.DM$

इस प्रकार,

$AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

2. $\triangle AMB$ में,

$$\angle AMB = 90^\circ$$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमे मिलता है।

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = AM^2 + (BD - DM)^2$$

$$= AM^2 + BD^2 + DM^2 - 2BD.DM$$

$$[\because DM^2 + AM^2 = AD^2]$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 2\frac{BC}{2}.DM$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - BC.DM$$

इस प्रकार,

$$AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left[\frac{BC}{2}\right]^2 \ldots (2)$$

3. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$AB^2 + AC^2 = \left[AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$+ \left[AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$= AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AD^2 + BC.MD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$= 2AD^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

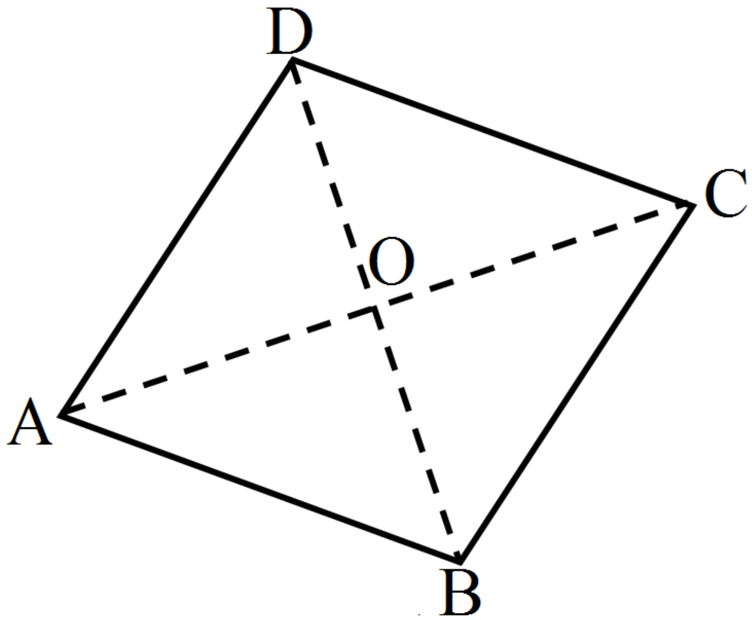
$$= 2AD^2 + 2\frac{BC^2}{4}$$

$$= 2AD^2 + \frac{BC^{\ 2}}{2}$$

इस प्रकार $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकार्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



हमे प्राप्त है: एक समांतर चतुर्भुज ABCD, AC और BD समांतर चतुर्भुज ABCDके विकर्ण है चुकी एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते है।

$\therefore$ AC और BD का मध्य बिंदु o है। अब $\triangle ABC$ में, BO एक मध्यिका है।

$$\therefore AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + \tfrac{1}{2}AC^2 \ldots (1)$$

तथा $\triangle ABC$, में DO एक मध्यिका है।

$$\therefore AD^2 + CD^2 = 2DO^2 + \tfrac{1}{2}AC^2 \ldots (2)$$

(1) और (2) से हमे प्राप्त होता है।

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2$$

$$= 2BO^2 + \tfrac{1}{2}AC^2 + 2DO^2 + \tfrac{1}{2}AC^2$$

$$= 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}AC^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}AC^2$$

$$[\because BO = \tfrac{1}{2}BD \text{ और } DO = \tfrac{1}{2}BD]$$

$$= 2\left[\frac{BD^2}{4} + \frac{BD^2}{4}\right] + \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}AC^2$$

$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

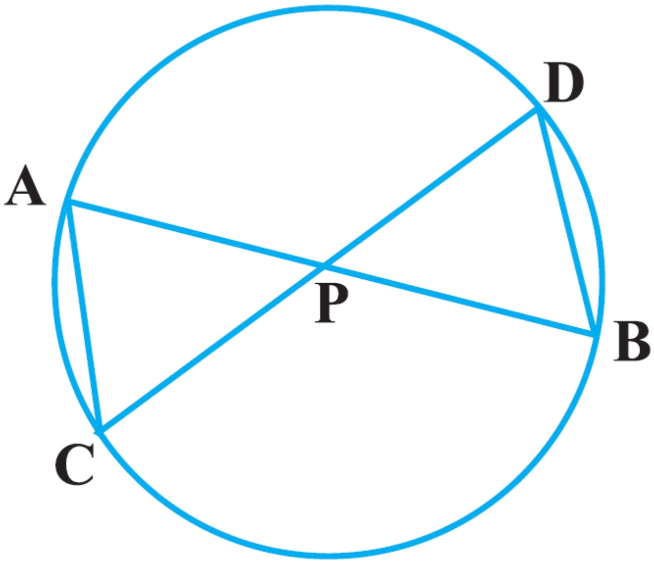
$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$ जो की अभीष्ट संबन्ध है।

प्रश्न 7 आकृति में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु p पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि:

1. $\triangle APC \sim \triangle DPB$

2. AP.PB = CP.DP



उत्तर-

हमे प्राप्त है: की वृत की दो जीवाए AB और CD है AB और CD परस्पर P पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\therefore \angle APC = \angle DPB$$

[शीर्षभिमुख कोण] .....(1)

रचना: AC और BD को मिलाओ।

1. $\triangle APC$ और $\triangle DPB$

   [एक ही वृत्तखंड में बने कोण] .....(2)

   (1) और (2) से AA समरूपता का प्रयोग करने पर $\triangle APC \sim \triangle DPB$

2. चुकी $\triangle APC \sim \triangle DPB$ [ऊपर सिद्ध किया है]

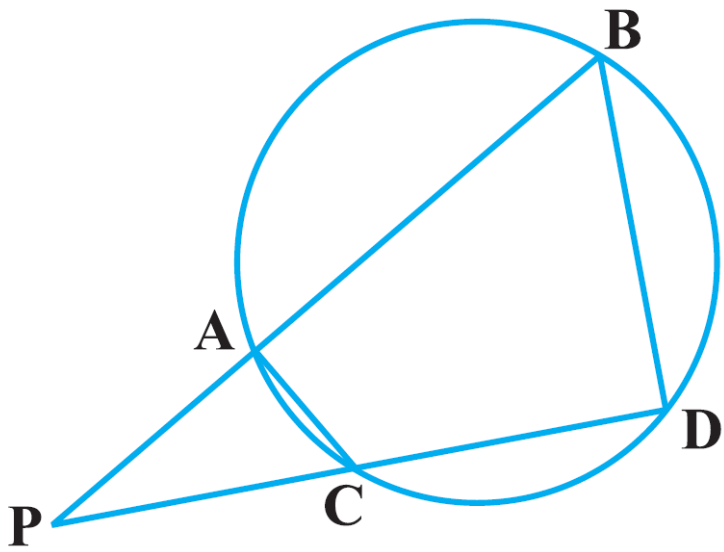
   $\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

   $$\Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$$

   $\Rightarrow AP \times BP = CP \times DP$ जो की अभीष्ट संबन्ध है।

प्रश्न 8 आकृति में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि

1. $\triangle PAC \sim PDB$
2. PA.PB = PC.PD



उत्तर- वृत के अंदर दो जीवाए AB और CD है जो की (बढ़ाने पर) वृत के बाहर बिंदु P पर मिलते है।

1. चुकी एक चक्रीय चतुर्भुज का बाहा कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \ldots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \ldots (2)$$

∴ (1} और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

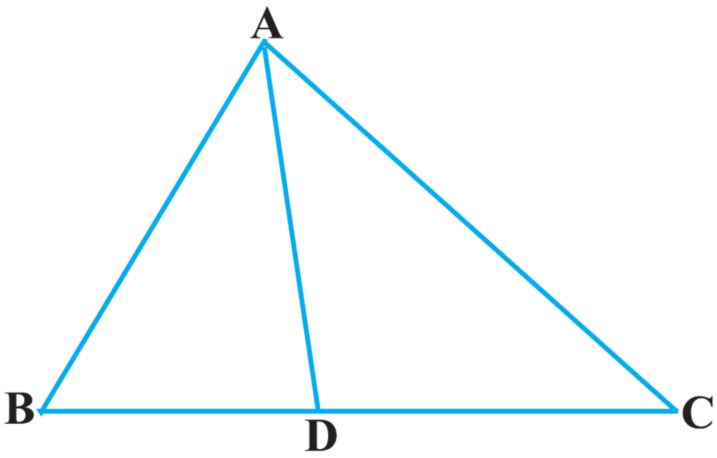
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

प्रश्न 9 आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है| सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



उत्तर- वृत के अंदर दो जीवाए AB और CD है जो की (बढ़ाने पर) वृत के बाहर बिंदु P पर मिलते है।

1. चुकी एक चक्रीय चतुर्भुज का बाहा कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \ldots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \ldots (2)$$

$\therefore$ (1} और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

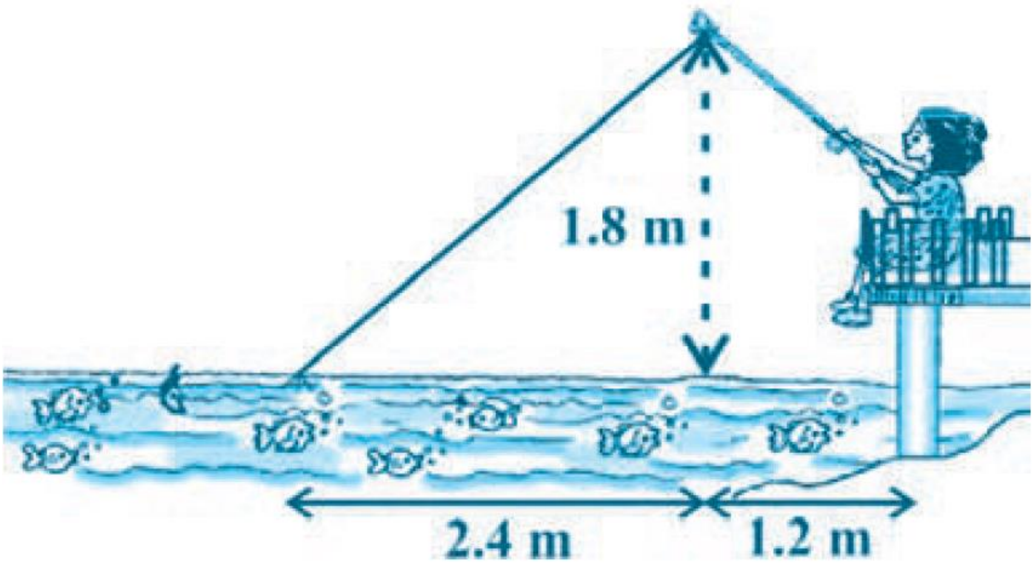
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

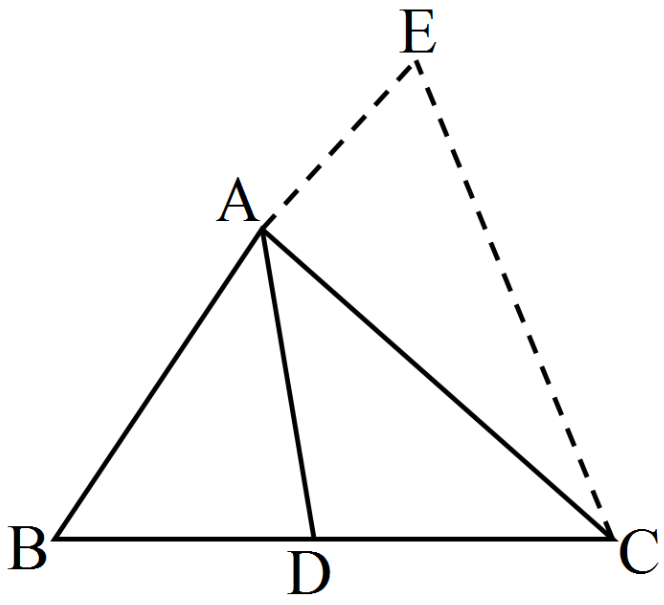
$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

प्रश्न 10 नाजिमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दुरी 3.6m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दुरी 2.4m है यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति)? यदि वह डोरी को 5cm/s की दर से अन्दर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दुरी कितनी होगी?



उत्तर-



रचना:

1. BAको E तक इस प्रकार बढ़ाओ की $AE = AC$
2. EC को मिलाओ चुकी

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

$$AC = AE$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

अब, $\triangle BCE$ में $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$

∴ मूलभूत-समरूपता प्रमेय के विलोम से, AD || CE और BE एक तिर्यक रेखा है।

$\Rightarrow \angle BAD = \angle AEC \ldots (1)$ [संगत कोण]

$\angle CAD = \angle ACE \ldots (2)$ [एकांतर कोण]

चुकी $AC = AE$

∴ इनके सम्मुख कोण भी समान होगी,

$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACE \ldots (3)$

(1) और (3) से,

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{ACE} \ldots (4)$$

(2) और (4) से,

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD}$$

$\Rightarrow$ AD कोण $\angle \mathrm{BAC}$ का समद्विभाजक है।